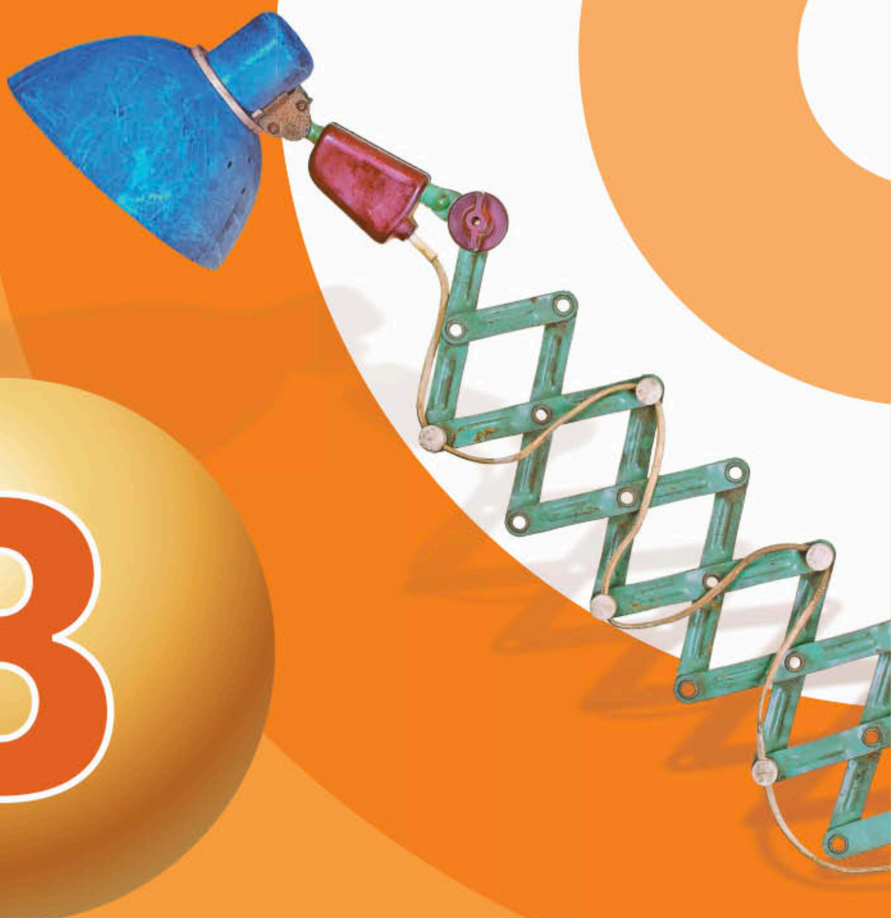
СФЕРЫ

А.А. Берсенев
Н.В. Сафонова

ГЕОМЕТРИЯ

ГЕОМЕТРИЯ



8

А. А. Берсенев
Н. В. Сафонова

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

Учебник

*Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации*

2-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
Санкт-Петербург
Санкт-Петербургский филиал
издательства «Просвещение»
2022

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
Б48

Серия «Сферы» основана в 2003 году

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 1142 от 19.11.2016 г.)
педагогической (заключение РАО № 1033 от 21.11.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 517-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз

Издание выходит в pdf-формате

Берсенев, Александр Анатольевич.
Б48 Геометрия : 8-й класс : учебник : издание в pdf-формате / А. А. Берсенев, Н. В. Сафонова. — 2-е изд., стер. — Москва : Просвещение ; Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский филиал издательства «Просвещение», 2022. — 175, [1] с. : ил. — (Сферы).
ISBN 978-5-09-101273-6 (электр. изд.). — Текст: электронный.
ISBN 978-5-09-094493-9 (печ. изд.).

Данный учебник продолжает линию учебно-методических комплексов «Сферы» по геометрии. Издание подготовлено в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом и освещает вопросы курса геометрии для основной школы. В разноуровневой системе заданий представлены, наряду с традиционными, практико-ориентированные, исследовательские и проектные задания; отмечены задания, которые можно выполнять в компьютерной среде, в заданиях к параграфам есть рубрика «Повторяем». Богатый иллюстративный ряд, сопровождающий каждый параграф учебника, отражает применение изучаемого материала в практической жизни. Такая система представления учебного материала способствует повышению мотивации к обучению, качественному освоению учебного предмета, эффективному формированию УУД, качественной подготовке к ОГЭ и ЕГЭ.

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-101273-6 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-094493-9 (печ. изд.)

СОДЕРЖАНИЕ

РАБОТАЕМ С УЧЕБНИКОМ

Учебник состоит из пяти глав, каждая из которых разделена на параграфы.

Параграф начинается с вводной рубрики «ВЫ УЗНАЕТЕ» и вступительного текста, содержащего основную идею параграфа. Рубрика «Вы узнаете» познакомит вас с основными вопросами, которые изучаются в параграфе.

На страницах учебника вы встретите рубрики, которые помогут вам лучше понять изучаемый материал.

Рубрика «ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ БЛОКНОТ» содержит интересный дополнительный материал.

Рубрика «В ФОКУСЕ» содержит примеры решения опорных задач. Запись решения можно рассматривать как один из образцов оформления решения.

Определение Так обозначаются определения.

Теорема ▼ Так обозначаются теоремы.

Завершает каждый параграф рубрика «ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ», которая поможет вам усвоить материал параграфа.

1 В конце главы представлена система задач к каждому параграфу.
Так обозначены номера заданий базового уровня.

1 Так обозначены номера заданий более сложного уровня.

К 1 Буквой «К» обозначены задания, которые можно выполнять на компьютере.

Т 1 Буква «Т» означает, что это задание есть и в тетради-тренажёре.

Задачи этой рубрики помогут вам более глубоко погрузиться в геометрический материал.

ПОВТОРЕНИЕ

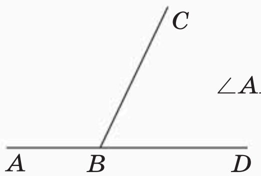
Дорогие восьмиклассники!

Продолжая изучать свойства геометрических фигур на плоскости, мы будем опираться на материал, изученный в 7 классе. Напомним основные утверждения.

СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

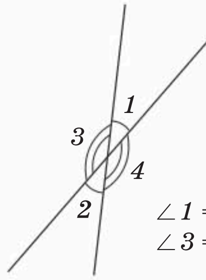
1. Углы ABC и CBD на рисунке *1* — смежные.
Сумма смежных углов равна 180°.

2. Углы *1* и *2*, а также *3* и *4* на рисунке *2* — вертикальные.
Вертикальные углы равны.



$\angle ABC + \angle CBD = 180°$.

Рис. 1



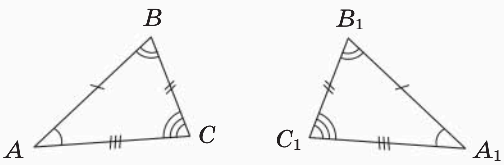
$\angle 1 = \angle 2$, а также $\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные.

Рис. 2

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Треугольники называются равными, если их можно совместить наложением.

В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы, и наоборот, против равных углов лежат равные стороны. Равные элементы называются соответствующими. Так, на рисунке *3* стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 соответствующие; углы A и A_1, B и B_1, C и C_1 соответствующие.



$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$; $\angle C = \angle C_1$.

Рис. 3

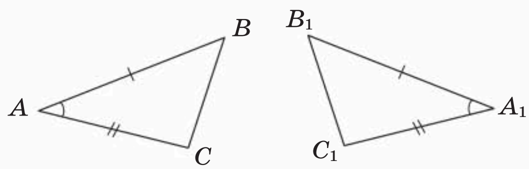


Рис. 4

Признаки равенства треугольников.

1-й признак. **Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны** (рис. *4*).

2-й признак. **Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны** (рис. *5*).

3-й признак. **Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны** (рис. *6*).

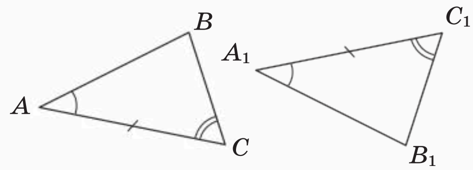


Рис. 5

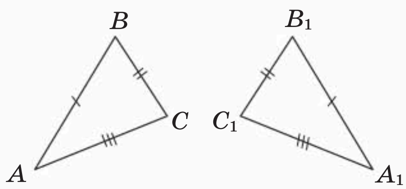


Рис. 6

Равнобедренный треугольник. Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны (рис. *7*).

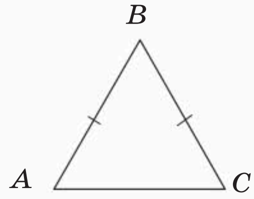
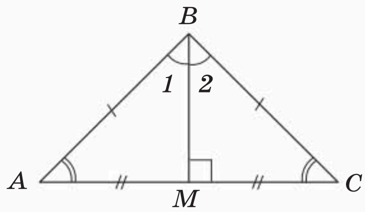


Рис. 7

Свойства равнобедренного треугольника:

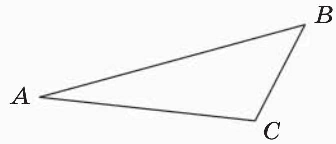
— **углы при основании равнобедренного треугольника равны;**

— **биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является его медианой и высотой** (рис. *8*).



1. Если $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$.
2. Если $AB = BC$ и $\angle 1 = \angle 2$, то $AM = CM$, $BM \perp AC$.

Рис. 8



1. Если $AB > BC$, то $\angle C > \angle A$.
2. Если $\angle C > \angle A$, то $AB > BC$.

Рис. 9

Признаки равнобедренного треугольника:

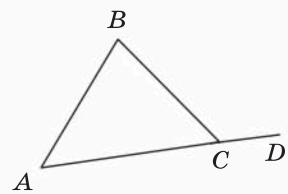
Треугольник является равнобедренным, если:

— **два угла треугольника равны;**

— **медиана является его высотой или биссектрисой;**

— **биссектриса является его высотой или медианой;**

— **высота является его медианой или биссектрисой.**



$\angle BCD = \angle A + \angle B$

Рис. 10

Также мы будем опираться на следующие теоремы:

1) **В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и обратно: против большего угла лежит бóльшая сторона** (рис. *9*).

2) **Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.**

3) **Сумма углов треугольника равна 180°.**

4) **Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним** (рис. *10*).

Прямоугольный треугольник. Треугольник, один из углов которого равен 90°, называется прямоугольным (рис. *11*).

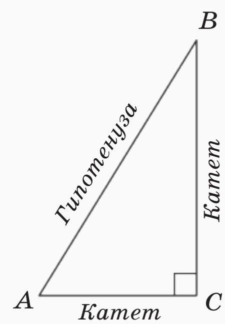


Рис. 11

Признаки равенства прямоугольных треугольников.

Прямоугольные треугольники равны:

— **по двум катетам;**

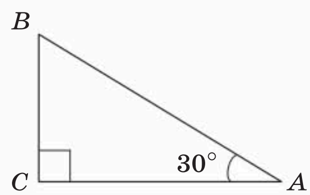
— **по катету и прилежащему к нему острому углу;**

— **по катету и противолежащему ему острому углу;**

— **по гипотенузе и острому углу;**

— **по гипотенузе и катету.**

В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы (рис. *12*).



$BC = \frac{1}{2}AB.$

Рис. 12

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ

Через любую точку плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой (рис. *13*).

Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются (рис. *14*).

Аксиома параллельных прямых: **через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной** (рис. *15*).

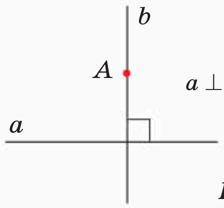


Рис. 13

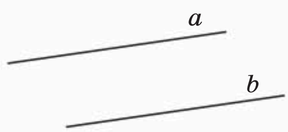


Рис. 14

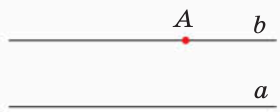


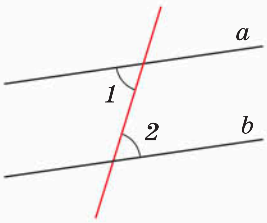
Рис. 15

Признаки параллельности двух прямых:

— **если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны** (рис. *16*);

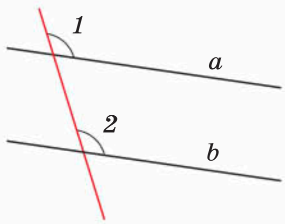
— **если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны** (рис. *17*);

— **если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то такие прямые параллельны** (рис. *18*);



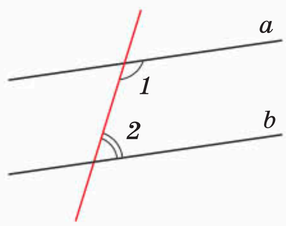
Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

Рис. 16



Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

Рис. 17

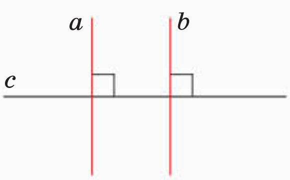


Если $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $a \parallel b$.

Рис. 18

— **две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны** (рис. *19*);

— **две прямые, параллельные третьей, параллельны** (рис. *20*).

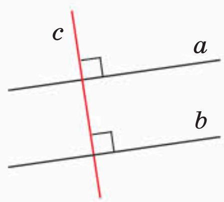


Если $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel c$.

Рис. 19

Если $a \parallel b$ и $c \parallel b$, то $a \parallel c$.

Рис. 20



Если $a \parallel b$, $c \perp a$, то $c \perp b$.

Рис. 21

Свойства параллельных прямых.

Если параллельные прямые пересечены секущей, то:

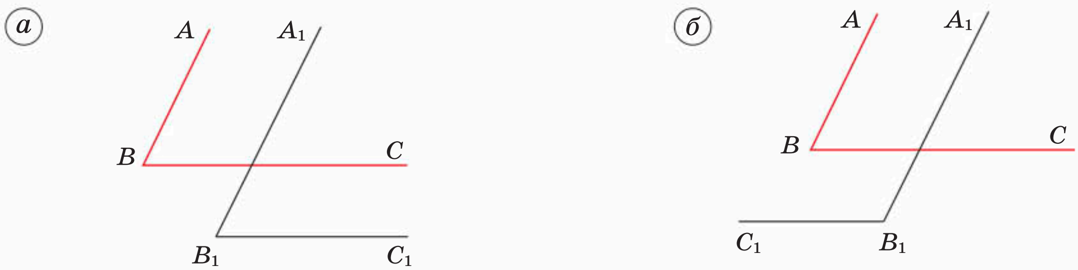
— **накрест лежащие углы равны;**

— **соответственные углы равны;**

— **сумма односторонних углов равна 180°.**

Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой прямой (рис. *21*).

Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.



Если $AB \parallel A_1B_1$ и $BC \parallel B_1C_1$, то $\angle B = \angle B_1$.

Если $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, то $\angle B + \angle B_1 = 180°$.

Рис. 22

Углы с соответственно параллельными сторонами равны или в сумме составляют 180° (рис. *22*).

Углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны или в сумме составляют 180° (рис. *23*).

Если $BA \perp DA$; $BC \perp DC$, то $\angle B + \angle D = 180°$.

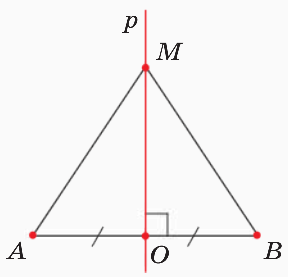
Если $BA \perp DA$; $BC \perp DC$, то $\angle B = \angle D$.

Рис. 23

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

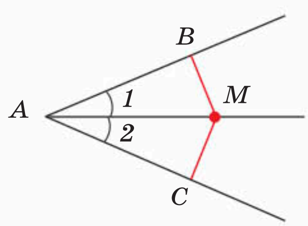
1. Серединный перпендикуляр к отрезку является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка (рис. *24*).

2. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудалённых от сторон угла (рис. *25*).



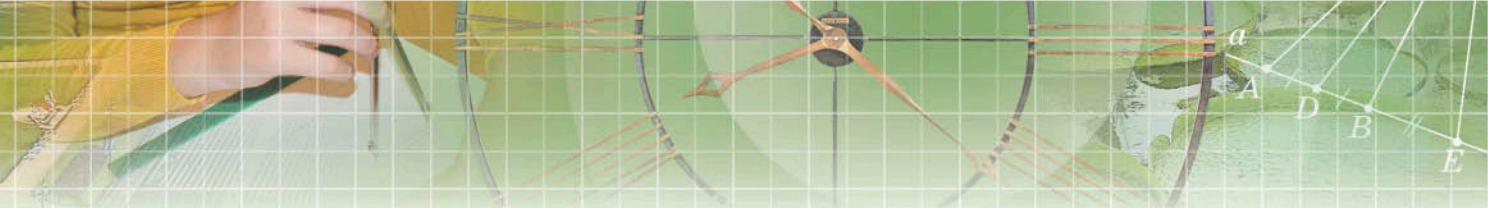
Если $MO \perp AB$ и $AO = OB$, то $AM = BM$.

Рис. 24



Если $\angle 1 = \angle 2$ и $MB \perp AB$, $MC \perp AC$, то $BM = CM$.

Рис. 25



ГЛАВА 1

ОКРУЖНОСТЬ

- ОКРУЖНОСТЬ
- ОКРУЖНОСТЬ И ПРЯМАЯ
- ЦЕНТРАЛЬНЫЙ И ВПИСАННЫЙ УГЛЫ
- ХОРДЫ И ДУГИ
- ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК
- ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

ИНТЕРЕСНО

Самое знаменитое научное сочинение в истории человечества — «Начала» — написано древнегреческим математиком Евклидом, жившим в III в. до н. э. За две с лишним тысячи лет каждый, кто изучал геометрию (в том числе и мы с вами), учил её по Евклиду. Из книг, дошедших до нас из глубины веков, «Начала» Евклида являются первой книгой, в которой изложение геометрии проведено в логичной форме: начинается с нескольких простых положений и вырастает из них с помощью логических рассуждений. С тех пор этот метод стал основным в математике. Логика в математике играет ту же роль, что эксперимент в физике. Если в физике лучший способ убедиться в правильности идеи — пойти в лабораторию и попытаться её проверить, то в математике — ещё немного поразмышлять и попытаться её доказать.

1.1 ОКРУЖНОСТЬ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Некоторые свойства окружности и круга

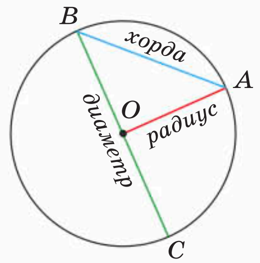
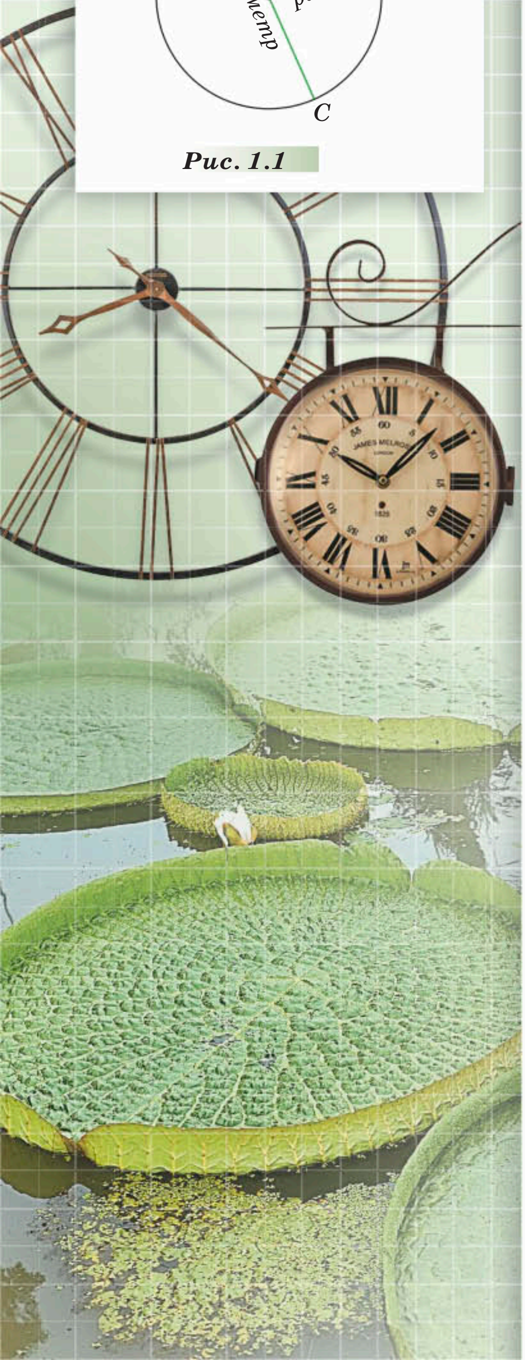


Рис. 1.1



Окружность играет значительную роль в нашей повседневной жизни. Так, чтобы перенести чемодан, требуются значительные усилия, но, если у чемодана есть колёса, его можно легко катить благодаря свойствам окружности. Знакомство с окружностью мы начали в 7 классе. Продолжаем изучать геометрию окружности.

ОКРУЖНОСТЬ Вспомним основные понятия, относящиеся к окружности (рис. *1.1*).

Определение. **Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на одном и том же расстоянии от данной точки.

Данная точка называется **центром окружности.** Отрезок, соединяющий точку окружности с её центром, называется **радиусом окружности.**

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой окружности.**

Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром окружности.**

Диаметр — самая большая хорда. Ясно, что диаметр в 2 раза больше радиуса.

Определение. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом.**

Центр, радиус, хорда, диаметр круга — это центр, радиус, хорда, диаметр окружности, ограничивающей круг (рис. *1.2*).

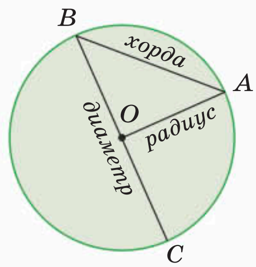


Рис. 1.2

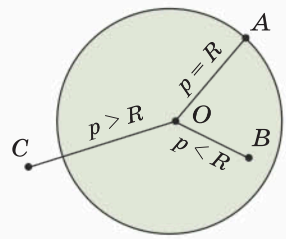


Рис. 1.3

Для любой точки круга выполняется неравенство $p \leqslant R$, где p — расстояние от этой точки до центра круга, а R — его радиус. На рисунке *1.3* точки O, A и B принадлежат кругу, а точка C кругу не принадлежит.

Докажем важное свойство окружности.

Теорема. **Никакие три точки окружности не лежат на одной прямой.**

Доказательство. Доказывать будем методом от противного. Предположим, что некоторые три точки A, B и C окружности с центром O лежат на прямой a.

Проведём радиусы окружности OA, OB и OC (рис. *1.4, а*).

Тогда треугольники AOB и BOC — равнобедренные с основаниями AB и BC соответственно.

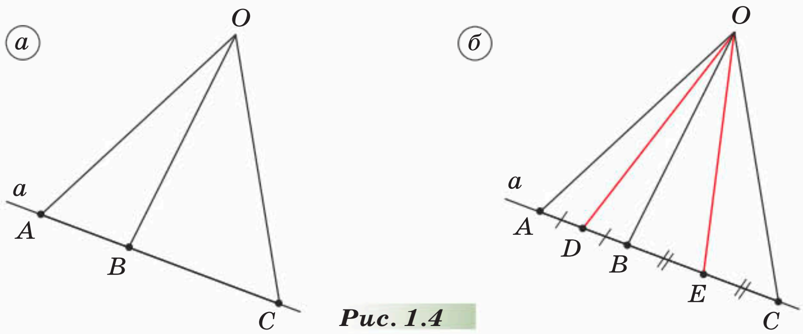


Рис. 1.4

Проведём в этих треугольниках медианы OD и OE (рис. *1.4, б*). Но медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является и его высотой. Значит, $OD \perp a$ и $OE \perp a$.

Таким образом, из точки O к прямой a проведены два перпендикуляра, что невозможно. Следовательно, предположение неверно и точки A, B и C не лежат на одной прямой. ▼

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ Взаимное расположение двух окружностей зависит от длин радиусов этих окружностей и расстояния между их центрами. На рисунке *1.5* изображены все случаи взаимного расположения двух окружностей. Пусть p — расстояние между центрами окружностей, R и r — радиусы окружностей. Так, на рисунке *1.5, а* $R - r < p < R + r$ — окружности имеют две общие точки, а на рисунке *1.5, б* $p = R + r$ — окружности имеют одну общую точку. В этом случае говорят, что окружности касаются друг друга внешним образом.

На рисунке *1.5, в* окружности касаются внутренним образом.

Для каждого случая запишите соответствующее соотношение.

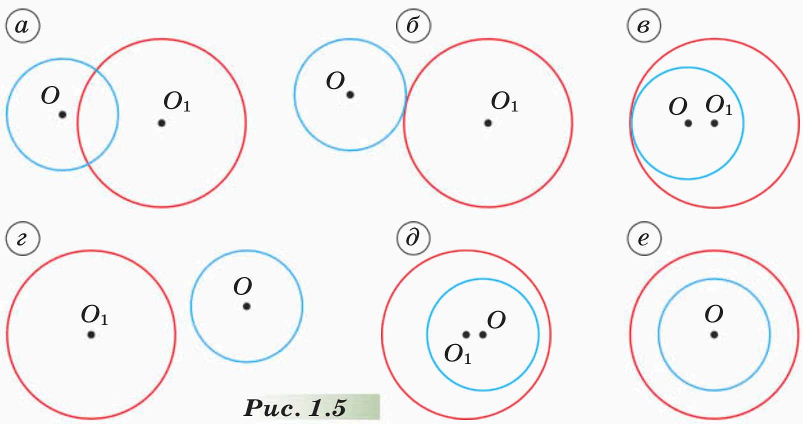


Рис. 1.5

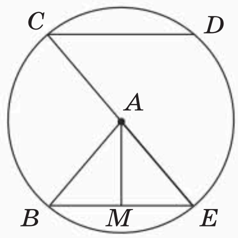


Рис. 1.6

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какую геометрическую фигуру называют окружностью?
- Что называют центром, радиусом, хордой, диаметром окружности?
- Принадлежит ли окружности её центр?
- Как связаны между собой диаметр и радиус окружности?
- На рисунке *1.6* изображена окружность с центром в точке A. Сколько на рисунке изображено радиусов, хорд, диаметров? Назовите их.
- Докажите соседу по парте, что никакие три точки окружности не лежат на одной прямой.
- Какую геометрическую фигуру называют кругом? Что является центром, радиусом, хордой круга? Принадлежит ли кругу его центр?
- При каком условии некоторая точка принадлежит данному кругу?
- На сколько частей могут разбить круг две хорды? три хорды?
- Является ли окружность геометрическим местом точек? Обоснуйте своё утверждение. А круг?
- Объясните все случаи взаимного расположения двух окружностей.

1.2 ОКРУЖНОСТЬ И ПРЯМАЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Случаи взаимного расположения прямой и окружности
- Что такое касательная и её свойства

Как могут располагаться прямая и окружность относительно друг друга?

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ Случаев взаимного расположения прямой и окружности всего три, и зависят они от длины радиуса окружности и расстояния от центра окружности до прямой.

Обозначим через R радиус окружности, через p расстояние от центра окружности до прямой. Рассмотрим все случаи.

1. **Если расстояние от центра окружности больше радиуса: $p > R$, то прямая и окружность не имеют общих точек** (рис. *1.7*).

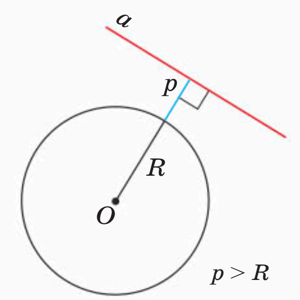


Рис. 1.7

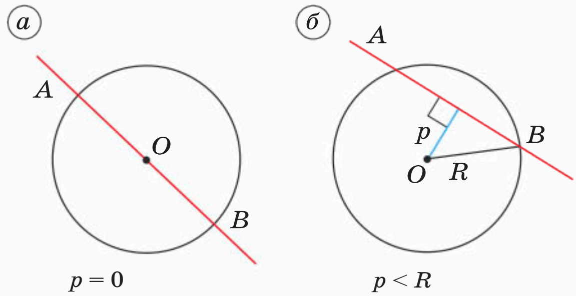


Рис. 1.8

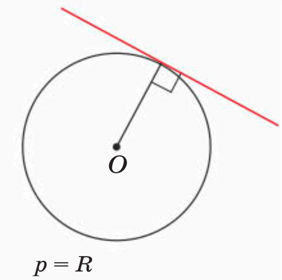


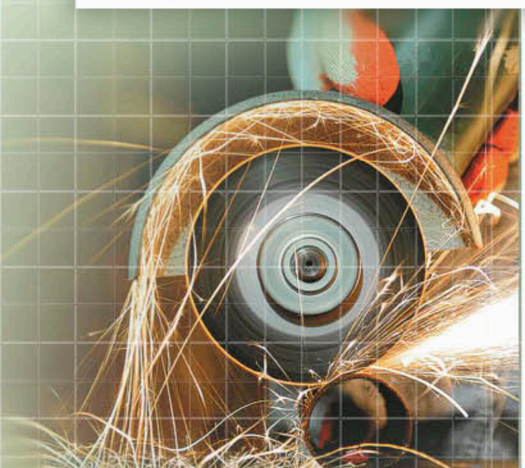
Рис. 1.9

2. **Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса: $p < R$, то прямая и окружность имеют две общие точки.**

В этом случае прямую называют **секущей** (рис. *1.8*).

3. **Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу: $p = R$, то прямая и окружность имеют только одну общую точку** (рис. *1.9*).

Попробуйте самостоятельно доказать три данных утверждения о взаимном расположении прямой и окружности.



КАСАТЕЛЬНАЯ

Определение. Прямую, имеющую только одну общую точку с окружностью, называют **касательной к окружности**.

Общая точка называется *точкой касания* прямой и окружности.

Следующая теорема доказывает важное свойство касательной.

Теорема. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

Доказательство. Пусть прямая a — касательная к окружности с центром O, точка A — точка касания прямой и окружности (рис. *1.10*). Докажем, что $a \perp OA$.

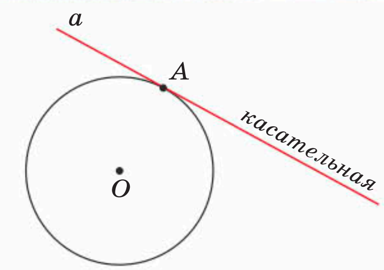


Рис. 1.10

Предположим, что прямая a не перпендикулярна радиусу OA. Тогда радиус OA будет наклонной к прямой a.

Значит, расстояние от центра окружности O до прямой a будет меньше радиуса. Следовательно, прямая a будет секущей, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $a \perp OA$. ▼

Докажем теперь обратную теорему, являющуюся признаком касательной.

Теорема. Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.

Доказательство. Рассмотрим рисунок *1.11*.

По условию прямая a перпендикулярна радиусу OA, то есть OA — перпендикуляр, проведённый из точки O к прямой a. Значит, расстояние от центра окружности до прямой a равно радиусу. Следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку, то есть данная прямая является касательной к окружности. ▼

Если точка не принадлежит кругу, то из неё к данной окружности можно провести две касательные (рис. *1.12*).

Отрезки, соединяющие данную точку с точками касания, называют **отрезками касательных**, проведённых из одной точки.

Докажем теорему о таких отрезках касательных.

Теорема. Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и образуют с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности, равные углы.

Доказательство. Пусть M — точка, из которой проведены касательные к окружности с центром O, A и B — точки касания (рис. *1.13*). Докажем, что $MA = MB$ и $\angle OMA = \angle OMB$.

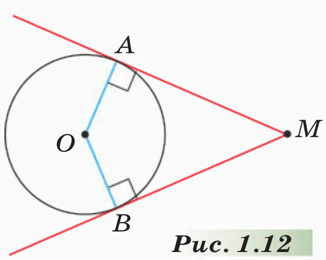


Рис. 1.12

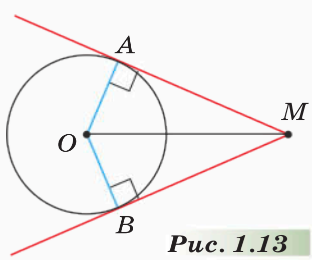


Рис. 1.13

Проведём в точки касания прямых и окружности радиусы OA и OB. По свойству касательной $MA \perp OA$, $MB \perp OB$. Следовательно, треугольники OAM и OBM — прямоугольные. У этих треугольников общая гипотенуза OM и равные катеты OA и OB. Значит, треугольники OAM и OMB равны. Отсюда $MA = MB$ и $\angle OMA = \angle OMB$. ▼

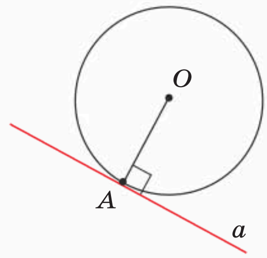


Рис. 1.11

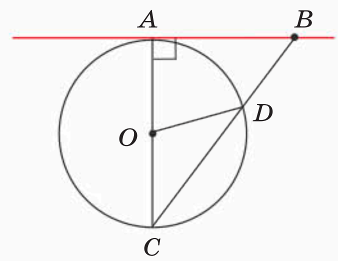


Рис. 1.14

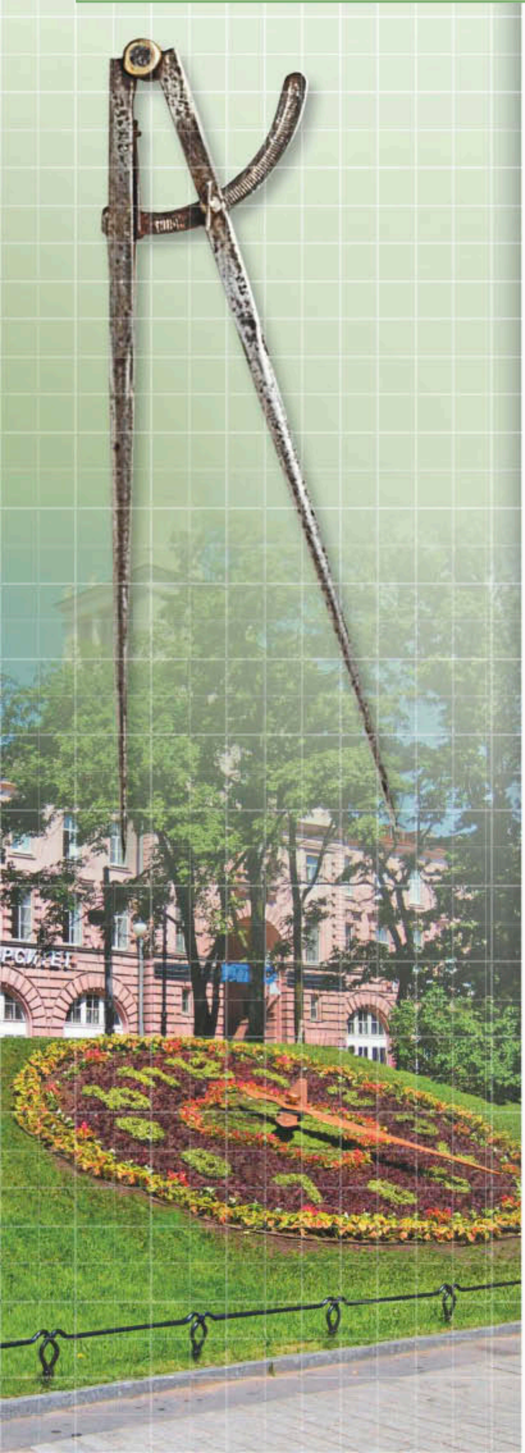
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Охарактеризуйте возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности.
- Какая прямая называется секущей, а какая – касательной к окружности?
- Диаметр окружности равен 10 см. Прямая a удалена от её центра на: 1) 4 см; 2) 10 см; 3) 5 см. В каком случае прямая a является касательной к окружности?
- Каким свойством обладает касательная к окружности? Докажите его.
- Верно ли, что прямая, перпендикулярная радиусу окружности, является касательной?
- Сформулируйте и докажите соседу по парте признак касательной к окружности.
- На рисунке *1.14*: AC – диаметр окружности, AB – касательная, $\angle ABC = 50°$. Найдите величину угла COD.
- Каким свойством обладают касательные, проведённые из одной точки к данной окружности? Докажите соседу по парте это свойство.

1.3 ЦЕНТРАЛЬНЫЙ И ВПИСАННЫЙ УГЛЫ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что такое дуга окружности и как её измерить
- Какой угол называется центральным и какой — вписанным
- Свойство вписанного угла



Рассмотрим теперь дуги и углы, связанные с окружностью.

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ И ДУГА ОКРУЖНОСТИ На рисунке *1.15* точки A и B разделяют окружность на две части, которые называются **дугами окружности**.

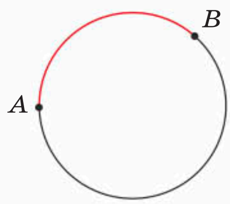


Рис. 1.15

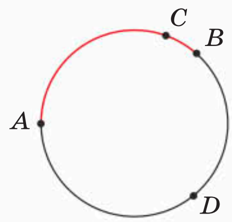


Рис. 1.16

Точки A и B называют концами дуг, и они принадлежат каждой из дуг.

Обозначают дуги знаком $\smile$.

Каждую из двух дуг на рисунке *1.15* можно записать так: $\smile AB$ (читают: «Дуга AB»). Но по записи $\smile AB$ не всегда можно понять, какая из двух дуг имелась в виду. Поэтому на дугах отмечают ещё по одной точке. Так, дуги, изображённые на рисунке *1.16*, записывают так: $\smile ACB$ (или $\smile BCA$) и $\smile ADB$ (или $\smile BDA$). (Если же ясно, о какой дуге идёт речь, то записывают кратко: $\smile AB$.)

Если отрезок, соединяющий концы дуг, является диаметром окружности, то каждая из двух дуг называется **полуокружностью**. На рисунке *1.17* изображены две полуокружности.

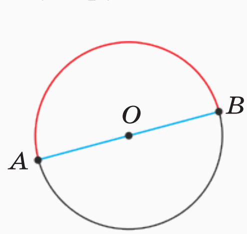


Рис. 1.17

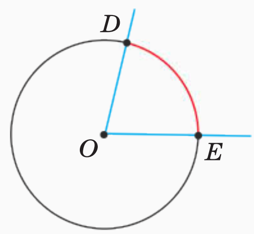


Рис. 1.18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным углом**.

На рисунке *1.18* угол DOE — центральный. Дуга DE лежит во внутренней области угла DOE. В таком случае говорят, что центральный угол DOE опирается на дугу DE.

Каждая дуга, так же, как и вся окружность, имеет градусную меру.

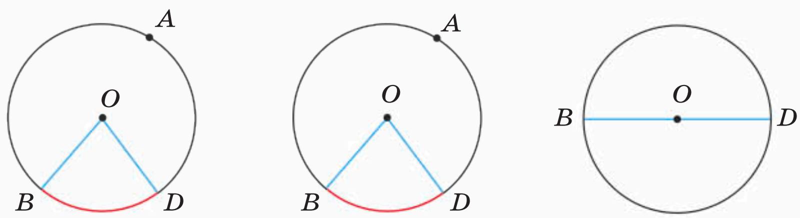
Градусную меру всей окружности считают равной 360°.

С помощью центральных углов можно измерять дуги окружности. Если центральный угол BOD опирается на дугу BD, то градусная мера дуги BD считается равной градусной мере угла BOD (рис. *1.19*). Записывают это так: $\smile BD = \angle BOD$ (читают: «Градусная мера дуги BD равна градусной мере угла BOD»).

Градусную меру дуги DAB считают равной:

$$360° - \angle BOD.$$

Градусная мера полуокружности равна 180°.



$\smile BD = \angle BOD$ $\quad$ $\smile BAD = 360° - \angle BOD$ $\quad$ $\smile BD = 180°$

Рис. 1.19

О хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что хорда стягивает дугу.

Ясно, что любая хорда стягивает две дуги, сумма градусных мер которых равна 360°.

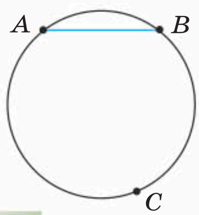


Рис. 1.20

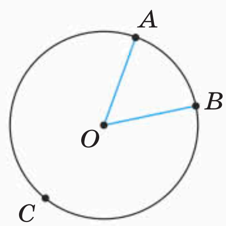


Рис. 1.21

Так, на рисунке *1.20* хорда AB стягивает каждую из дуг AB и ACB.

На рисунке *1.21* градусная мера дуги AB равна 70°, а градусная мера дуги ACB равна $360° - 70° = 290°$. Для краткости часто говорят: «Дуга ACB равна 290°».

ВПИСАННЫЙ УГОЛ

Определение. **Вписанным углом** окружности называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

На рисунке *1.22* угол ABC — вписанный. Дуга AC принадлежит углу ABC. Говорят, что угол ABC опирается на дугу AC.

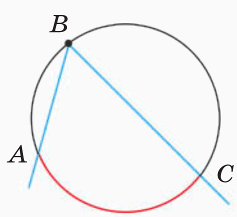
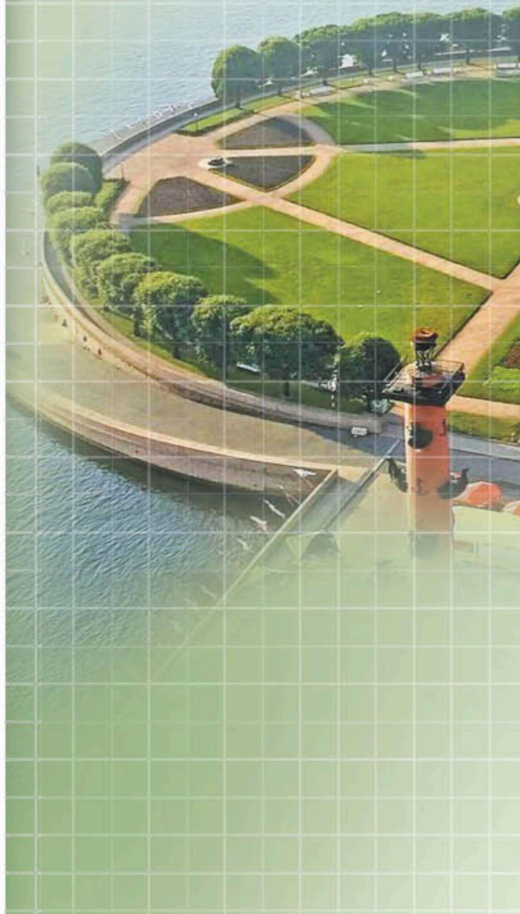


Рис. 1.22



Теорема. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается.

Доказательство. Рассмотрим вписанный угол ABC, опирающийся на дугу AC окружности, и докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$.

Возможны три случая расположения центра окружности O относительно вписанного угла ABC.

1-й случай. Центр O окружности принадлежит одной из сторон угла, например AB (рис. *1.23*).

Проведём радиус OC.

Треугольник BOC — равнобедренный, значит, $\angle OBC = \angle OCB$. Угол AOC — внешний угол треугольника ABC, значит, $\angle AOC = \angle OBC + \angle OCB = 2\angle OBC$. Отсюда

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

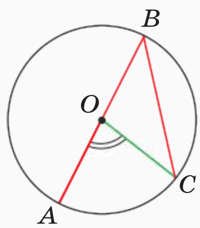


Рис. 1.23

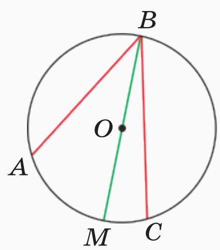


Рис. 1.24

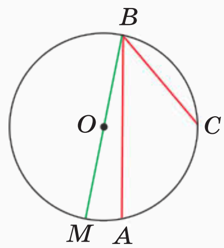


Рис. 1.25

2-й случай. Центр O окружности принадлежит углу ABC, но не принадлежит сторонам угла (рис. *1.24*).

Проведём диаметр BM. Тогда согласно доказанному выше $\angle ABM = \frac{1}{2} \smile AM$, $\angle MBC = \frac{1}{2} \smile MC$. $\angle ABC = \angle ABM + \angle MBC = \frac{1}{2} \smile AM + \frac{1}{2} \smile MC = \frac{1}{2} \smile AC$.

3-й случай. Центр O окружности не принадлежит углу ABC (рис. *1.25*).

Проведите самостоятельно доказательство теоремы в этом случае.

Следствие 1. Вписанный угол в два раза меньше центрального, опирающегося на ту же дугу (рис. *1.26*).
Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, — прямой (рис. *1.27*).
Следствие 3. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны. (рис. *1.28*).
Докажите эти следствия самостоятельно.

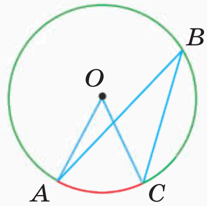


Рис. 1.26

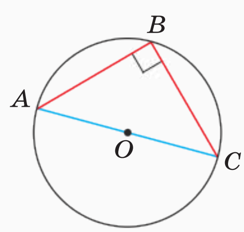


Рис. 1.27

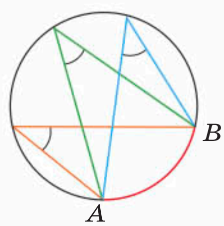
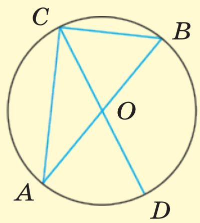


Рис. 1.28

Задача 1. В окружности с центром O проведены диаметры AB и CD. Чему равен угол ACD, если угол ABC равен $58°$?

Решим задачу двумя способами.



1-й способ.
Треугольник COB — равнобедренный, так как $OC = OB = R$. Отсюда $\angle OCB = \angle OBC = 58°$.
$\angle ACB$ — вписанный, опирается на диаметр AB, значит, $\angle ACB = 90°$.

$$\angle ACD = \angle ACB - \angle OCB = 90° - 58° = 32°.$$

2-й способ.
$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$, как вписанный и центральный, опирающиеся на одну и ту же дугу AC. Поэтому $\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \cdot 58° = 116°$.
$\angle AOD = 180° - \angle AOC = 180° - 116° = 64°$ как смежный с углом AOC.
$\angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$, как вписанный и центральный, опирающиеся на одну и ту же дугу AD. Отсюда $\angle ACD = 32°$.
Ответ: $32°$.
Приведите другие варианты решения задачи.

Свойство вписанного угла часто используют при решении различных задач. Вот одна из них.
Задача 2. Даны окружность с центром O и точка M (рис. *1*). Построить касательную к окружности, проходящую через точку M.

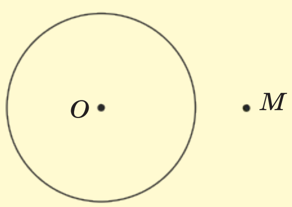


Рис. 1

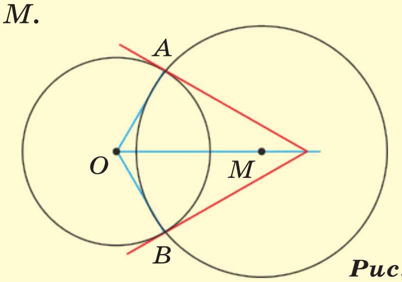
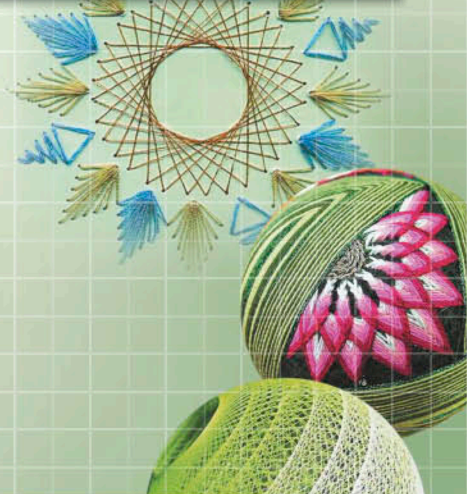


Рис. 2

Решение. *Анализ.* Пусть задача решена. Воспользуемся фактом, что вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.
Возьмём отрезок OM и окружность с диаметром OM (рис. *2*). Эта окружность пересечёт данную нам окружность в точках A и B. Тогда углы OAM и OBM — вписанные, опирающиеся на диаметр OM. Значит, $\angle OAM = \angle OBM = 90°$, то есть $MA \perp OA$ и $MB \perp OB$. OA и OB — радиусы данной в задаче окружности, тогда MA и MB — отрезки касательных к данной окружности, проходящих через точку M. Построение выполните самостоятельно.

Про вписанный угол, опирающийся на полуокружность, часто говорят так: «Вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности».



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Как называют части окружности, на которые две точки делят окружность?
- Какой угол называют центральным?
- В каком случае говорят, что угол опирается на дугу окружности?
- Как связаны между собой центральный угол и дуга, на которую он опирается?
- Чему равна градусная мера окружности?
- Сколько дуг стягивает каждая хорда? Чему равна сумма градусных мер этих дуг?
- Какой угол называют вписанным? Докажите теорему об измерении вписанного угла.
- Как связаны между собой вписанный и центральный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу?
- Чему равен вписанный угол, опирающийся на диаметр?
- Объясните, как, пользуясь чертёжным угольником, найти центр окружности.

1.4 ХОРДЫ И ДУГИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Некоторые соотношения между дугами и хордами в окружности

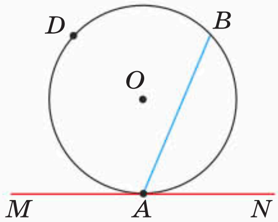


Рис. 1.29

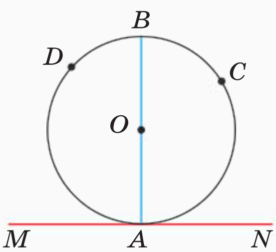


Рис. 1.30

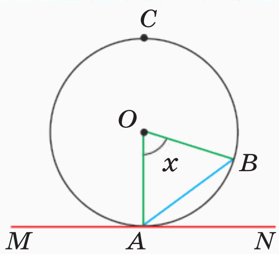


Рис. 1.31

Существует ли в окружности зависимость между дугами и хордами?

УГОЛ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И ХОРДОЙ Пусть прямая MN касается окружности с центром O в точке A. Проведём хорду AB (рис. *1.29*).

Каждый из образовавшихся углов MAB и NAB будем называть **углом между касательной и хордой**.

ТЕОРЕМА. Угол между касательной и хордой, проведённой из точки касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла.

Доказательство. Пусть прямая MN касается окружности с центром O в точке A, AB — хорда.

Докажем, что $\angle NAB = \frac{1}{2} \smile AB$.

1-й случай. Хорда AB является диаметром окружности (рис. *1.30*). Тогда дуги, заключённые внутри углов MAB и NAB, являются полуокружностями, следовательно, $\smile ACB = 180^\circ$. Так как OA — радиус, проведённый в точку касания, то $\angle NAB = 90^\circ$. Значит,

$$\angle NAB = \frac{1}{2} \smile ACB.$$

Аналогично доказывается, что $\angle MAB = \frac{1}{2} \smile ADB$.

2-й случай. Хорда AB не является диаметром окружности.

Проведём радиус OA (рис. *1.31*). $OA \perp MN$ как радиус, проведённый в точку касания. Тогда величина острого угла NAB будет равна $90^\circ - \angle OAB$, а величина тупого угла MAB будет равна $90^\circ + \angle OAB$.

Обозначим градусную меру центрального угла AOB через x. Тогда $\smile AB = x$.

Треугольник AOB — равнобедренный, $\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - x) = 90^\circ - \frac{x}{2}$. Тогда

$$\angle NAB = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) = 90^\circ - 90^\circ + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}.$$

Так как $\smile AB = \angle AOB = x$, то $\angle NAB = \frac{1}{2} \smile AB$.

Аналогично доказывается, что $\angle MAB = \frac{1}{2} \smile ACB$. ▼

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМЫ Если в теореме поменять местами условие и заключение, то получим **обратную теорему**. Возьмём, например, теорему: «В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к его основанию, является высотой». Поменяем местами условие и заключение, получим обратную теорему: «Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник — равнобедренный». Важно понимать, что не всякая теорема имеет обратную, то есть не всякое обратное утверждение является верным.

При составлении обратной теоремы нужно быть очень внимательным.

Например, для теоремы — «Сумма смежных углов равна $180°$» — обратная ей теорема — «Если сумма двух углов равна $180°$, то углы смежные» — неверна (так, $\angle AEO + \angle BED = 180°$ на рисунке *1.32*, но они не являются смежными). Когда верны прямая и обратная теоремы, их часто называют **взаимно-обратными.**

ХОРДЫ, ДУГИ

ТЕОРЕМА. Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Если хорда является диаметром окружности, то теорема очевидна.

Пусть хорда AB не является диаметром окружности. На рисунке *1.32*: CD — диаметр окружности, AB — хорда. Точка E — точка пересечения AB и CD.

Докажем, что $AE = BE$.

Проведём радиусы OA и OB. Треугольник AOB — равнобедренный с основанием AB ($OA = OB$ как радиусы окружности). $CD \perp AB$ по условию. Тогда OE — высота треугольника AOB, а значит, и медиана. Таким образом, $AE = BE$. ▼

Сформулируем обратную теорему.

ТЕОРЕМА. Диаметр окружности, делящий хорду, не являющуюся диаметром, пополам, перпендикулярен этой хорде.

Докажите эту теорему самостоятельно.

ТЕОРЕМА. Если дуги равны, то равны и стягивающие их хорды.

Доказательство. Пусть в окружности с центром O равны дуги AB и CD (рис. *1.33*). Докажем, что равны хорды AB и CD.

Проведём радиусы OA, OB, OC и OD. Так как $\smile AB = \smile CD$, то $\angle AOB = \angle COD$, $OA = OB = OC = OD = R$, значит, $\triangle AOB = \triangle COD$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $AB = CD$. ▼

Обратная теорема **«Равные хорды стягивают равные дуги»**, вообще говоря, неверна. Как вы думаете, почему?

ТЕОРЕМА. Дуги, заключённые между параллельными хордами, равны.

Доказательство. На рисунке *1.34* хорды AB и CD параллельны. Докажем, что $\smile AC = \smile BD$.

Проведём хорду BC (рис. *1.35*). Тогда $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие, образованные параллельными прямыми AB и CD и секущей BC.

Но углы *1* и *2* являются вписанными в окружность. Так как углы равны, то равны и дуги, на которые они опираются, то есть $\smile AC = \smile BD$. ▼

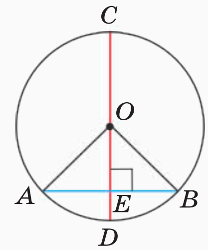


Рис. 1.32

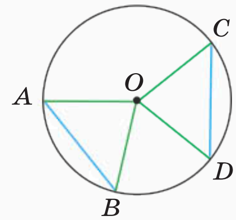


Рис. 1.33

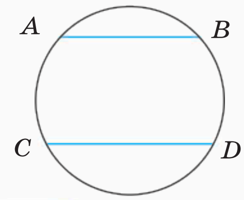


Рис. 1.34

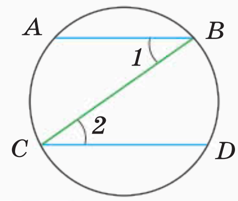


Рис. 1.35

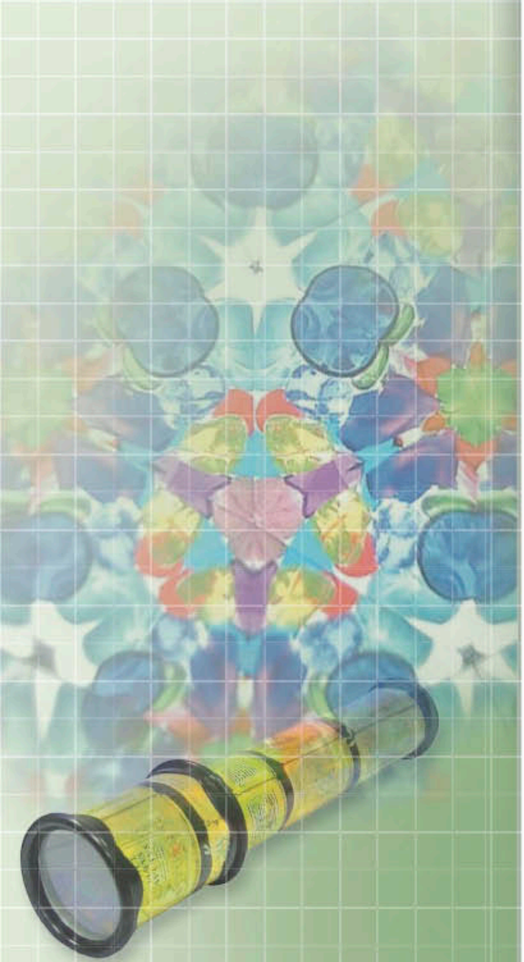
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Чему равен угол между касательной и хордой? Докажите соответствующую теорему соседу по парте.
- Верно ли, что если дуги равны, то равны и стягивающие их хорды? Обоснуйте своё утверждение соседу по парте.
- Докажите теорему о равенстве дуг, расположенных между параллельными хордами.
- Найдите в предыдущих параграфах взаимно-обратные теоремы.

1.5 ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке
- Какая окружность является вписанной в треугольник



Продолжаем рассматривать взаимное расположение окружности и геометрических фигур. Следующая фигура — треугольник.

О БИССЕКТРИСАХ ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 (рис. 1.36).

Докажем, что точка O принадлежит биссектрисе CC_1.

Рис. 1.36

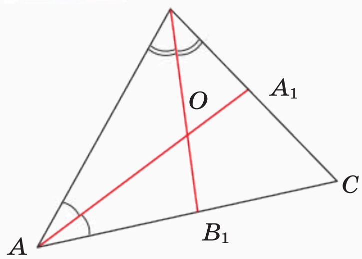
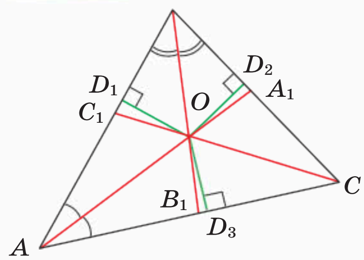


Рис. 1.37



Опустим из точки O перпендикуляры OD_1, OD_2, OD_3 на стороны треугольника ABC (рис. 1.37).

Точка O принадлежит биссектрисе угла A, значит, по свойству биссектрисы равноудалена от сторон угла, то есть $OD_3 = OD_1$.

Аналогично $OD_2 = OD_1$. Следовательно, $OD_3 = OD_2$. Это означает, что точка O равноудалена от сторон угла C, значит, точка O принадлежит биссектрисе угла C.

Таким образом, все три биссектрисы пересекаются в одной точке.

ВПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Определение. Окружность называется **вписанной в треугольник**, если все стороны треугольника касаются окружности. А треугольник в таком случае называется **описанным около окружности** (рис. 1.38).

Докажем теорему об окружности, вписанной в треугольник.

Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну.

Доказательство. Пусть O — точка пересечения биссектрис произвольного треугольника ABC.

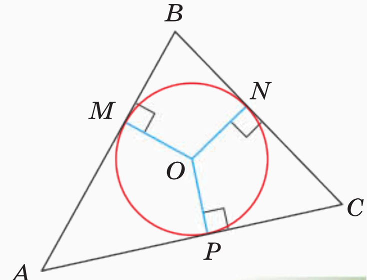


Рис. 1.38

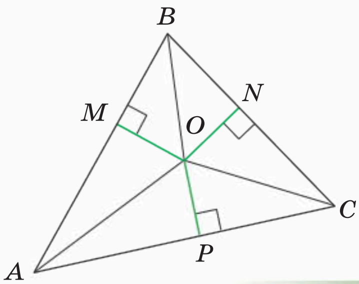


Рис. 1.39

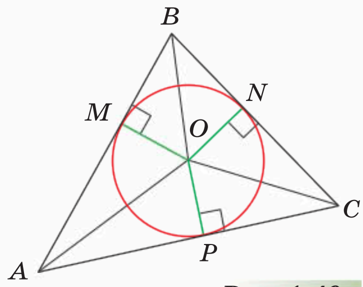


Рис. 1.40

Проведём из этой точки перпендикуляры OM, ON и OP к сторонам AB, BC и AC соответственно (рис. *1.39*).

Точка O принадлежит биссектрисам углов треугольника, значит, она равноудалена от сторон углов $OM = ON = OP$. Значит, окружность с центром O и радиусом OP проходит через точки M, N и P.

Стороны треугольника имеют общую точку с окружностью и перпендикулярны проведённому в эту точку радиусу, значит, стороны треугольника касаются этой окружности в точках M, N и P.

Значит, окружность с центром O и радиусом OP является вписанной в треугольник (рис. *1.40*).

Докажем теперь, что такая окружность — единственная.

Если окружность касается всех сторон треугольника ABC, то её центром является точка пересечения биссектрис треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника, то есть OP. Отсюда следует, что вписанная в треугольник ABC окружность — единственная. ▼

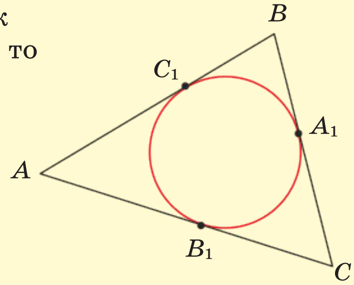
Центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис треугольника.

Задача 1. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Докажите, что $AB_1 = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.

Решение. В треугольнике ABC: $AC_1 = AB_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$ как отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки.

$AC = AB_1 + CB_1$, отсюда $AB_1 = AC - CB_1$, а так как $CB_1 = CA_1$, а $CA_1 = BC - BA_1$, то $AB_1 = AC - BC + BA_1$; так как $BA_1 = BC_1$, а $BC_1 = AB - AC_1$, то $AB_1 = AC - BC + AB - AC_1$, так как $AC_1 = AB_1$, то $AB_1 = AC - BC + AB - AB_1$, отсюда получаем $2\,AB_1 = AC + AB - BC$ и

$AB_1 = \dfrac{AB + AC - BC}{2}$.



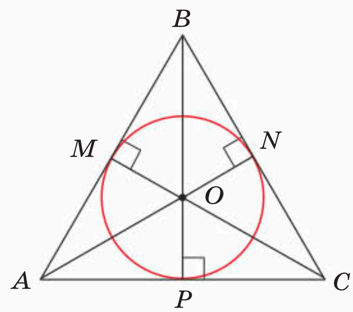


Рис. 1.41

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите соседу по парте теорему о пересечении биссектрис треугольника.
- Какую окружность называют вписанной в треугольник? Какой треугольник называют описанным около окружности?
- Сформулируйте и докажите соседу по парте теорему об окружности, вписанной в треугольник.
- Где расположен центр вписанной в треугольник окружности?
- Может ли центр вписанной в треугольник окружности находиться вне треугольника?
- На рисунке *1.41* треугольник ABC – равнобедренный с основанием AC. O – точка пересечения биссектрис треугольника. M, N, P – точки касания вписанной окружности. Есть ли на рисунке:
  а) равные треугольники (если есть, докажите их равенство);
  б) равнобедренные треугольники? Обоснуйте своё утверждение.

1.6 ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Свойство серединных перпендикуляров к сторонам треугольника
- Около любого треугольника можно описать окружность

В предыдущем пункте мы доказали, что в любой треугольник можно вписать окружность. Теперь рассмотрим, возможно ли треугольник вписать в окружность.

СЕРЕДИННЫЕ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ К СТОРОНАМ ТРЕУГОЛЬНИКА

ТЕОРЕМА. **Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.**

Доказательство. Пусть a и b — серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC треугольника ABC (рис. *1.42*). Докажем, что они пересекаются в некоторой точке O.

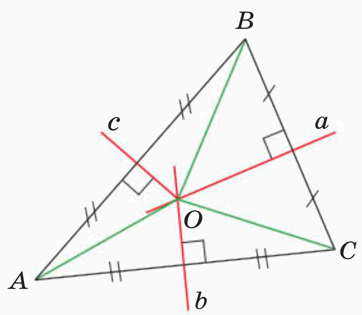


Рис. 1.42

Предположим противное: что a и b не пересекаются. Тогда $a \parallel b$.

Прямая CA перпендикулярна прямой b, тогда, CA перпендикулярна и прямой a.

Таким образом, через точку C проходят две прямые CA и CB, перпендикулярные прямой a, что невозможно.

Значит, серединные перпендикуляры a и b пересекаются.

А теперь докажем, что точка O принадлежит прямой c — серединному перпендикуляру к стороне AB.

По теореме о серединном перпендикуляре к отрезку имеем: $OA = OC$ и $OB = OC$. Отсюда $OB = OA$.

Значит, точка O равноудалена от концов отрезка AB, следовательно, точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB — прямой c.

Таким образом, все три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O.

Отметим, что так как $OA = OB = OC$, то точка O равноудалена от вершин треугольника ABC. ▼

Замечание. Точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника может и не принадлежать треугольнику (рис. *1.43*).

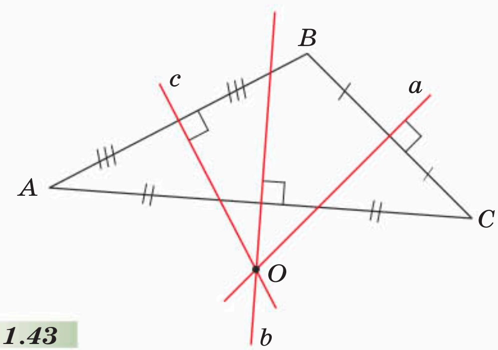
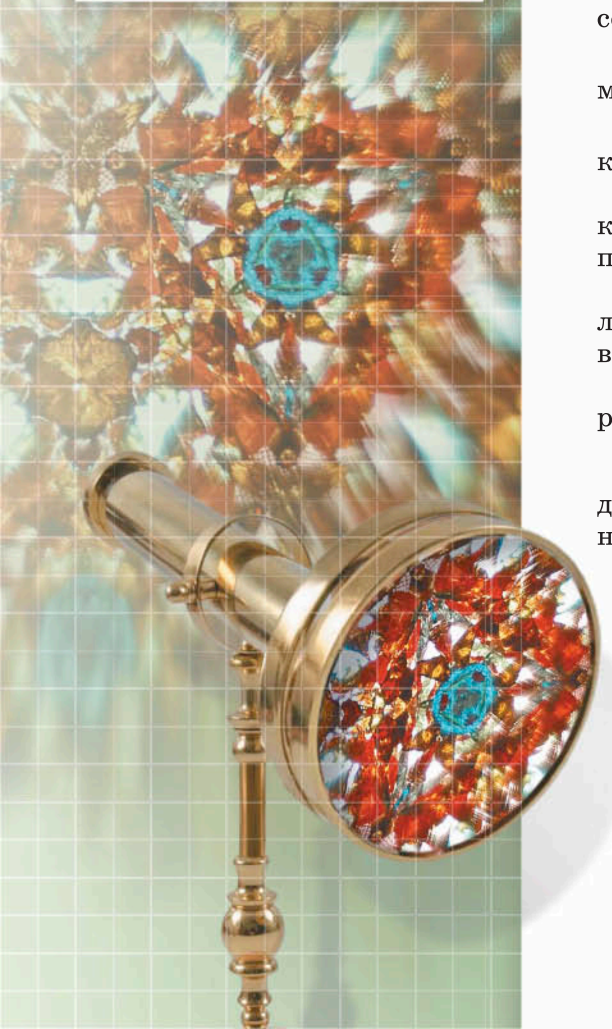


Рис. 1.43



ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ

Определение. Окружность называется **описанной около треугольника**, если все его вершины лежат на окружности, а треугольник называется **вписанным в окружность.**

Докажем теорему об окружности, описанной около треугольника.

Теорема. Около любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Доказательство. Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника ABC (рис. *1.44*).

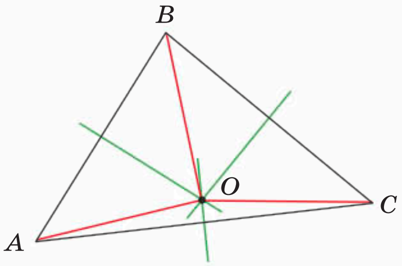


Рис. 1.44

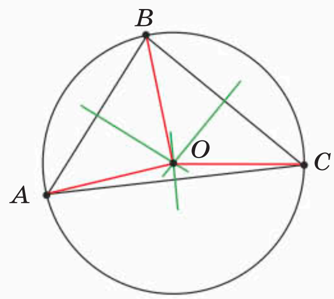


Рис. 1.45

Докажем, что окружность с центром O и радиусом OA является описанной около треугольника ABC.

По доказанной выше теореме точка O равноудалена от вершин треугольника ABC, то есть $OA = OB = OC$. Значит, окружность с центром O и радиусом OA проходит через точки A, B и C (рис. *1.45*), следовательно, является описанной около треугольника ABC окружностью.

Докажем теперь, что такая окружность единственная.

Если окружность описана около треугольника ABC, то её центр равноудален от вершин треугольника, значит, центр окружности совпадает с точкой O — точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, а радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Отсюда следует, что описанная около треугольника окружность — единственная. Это окружность с центром в точке O и радиусом OA. ▼

Центром описанной около треугольника окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Полезно помнить, что в равностороннем треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Действительно, в равностороннем треугольнике каждая биссектриса является медианой и высотой, а значит, серединным перпендикуляром к стороне треугольника.

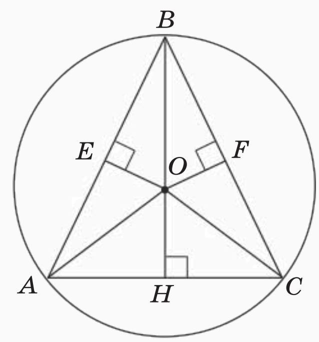


Рис. 1.46

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите теорему о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.
- Какая окружность называется описанной около треугольника?
- Где расположен центр описанной около треугольника окружности?
- Сформулируйте и докажите соседу по парте теорему об окружности, описанной около треугольника.
- На рисунке *1.46* треугольник ABC – равносторонний с основанием AC. Точка O – центр описанной окружности.
  а) Сколько треугольников изображено на рисунке?
  б) Есть ли среди них равные треугольники? Если да, то докажите их равенство.
  в) Есть ли среди них равнобедренные треугольники? Обоснуйте своё утверждение.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 1.1

1 а) Чему равен радиус окружности, если известно, что: а) он на 25 см меньше диаметра? б) диаметр на 3,6 см больше радиуса? в) Найдите длину наибольшей хорды окружности, радиус которой равен 6,7 см.

К Т **2** а) Начертите окружность с центром в точке O и радиусом 3 см. Проведите: хорду AB; диаметр AC; радиусы OA и OB. Укажите как можно больше свойств треугольника OAB.
б) Начертите окружность с центром в точке O. Начертите отрезок AB так, чтобы его концы принадлежали окружности, а центр окружности отрезку не принадлежал. Проведите радиусы OA и OB. Через середину отрезка AB — точку M — проведите радиус окружности. Чем является отрезок OM для треугольника AOB?

3 **ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ**
1) Расстояние между точками A и B равно 5 см. Чему равен наименьший возможный радиус окружности, проходящей через эти точки?
2) Можно ли указать наибольший радиус окружности, проходящей через точки A и B?
3) Где располагаются центры окружностей, проходящих через точки A и B? Поясните свой ответ.

К Т **4** а) AB и CD — хорды окружности с центром O. Известно, что $\triangle AOB = \triangle COD$. Докажите, что $AB = CD$.
б) AB и CD — хорды окружности с центром O. Известно, что $\triangle BAO = \triangle CDO$. Докажите, что $AB = CD$.

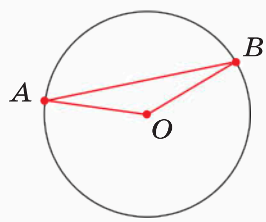


Рис. 1

К **5** а) Отрезок AB — хорда окружности с центром в точке O. $\angle AOB = 140^\circ$ (рис. *1*). Чему равен угол OAB?
б) Отрезок MN — хорда окружности с центром в точке O (рис. *2*), $\angle OMN = 55^\circ$. Найдите угол MON.

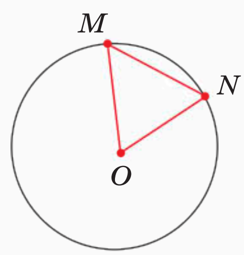


Рис. 2

К Т **6** а) Из точки A окружности проведены диаметр AB и хорда AC. Известно, что хорда AC равна радиусу окружности. Чему равен угол CAB?
б) Из одной точки окружности проведены две хорды, равные радиусу. Чему равен угол между ними?

Т **7** а) Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от её центра.
б) Докажите, что если хорды окружности равноудалены от её центра, то они равны.

К **8** 1) Отрезок AB является диаметром окружности с центром в точке O. На окружности расположена точка M такая, что $\angle AOM = 90^\circ$. а) Докажите, что $AM = BM$; б) докажите, что $\angle AMB = 90^\circ$.
2) Точка M расположена вне окружности радиуса R и удалена от центра O этой окружности на расстояние d.
а) Чему равно наибольшее расстояние от точки M до точек данной окружности?
б) Чему равно наименьшее расстояние от точки M до точек данной окружности?

9 Отрезки AB и CD — диаметры окружности с центром O. Докажите, что: а) хорды AC и BD равны; б) $AC \parallel BD$; в) $\angle CAB = \angle CDB$. г) Найдите периметр треугольника ACO, если известно, что диаметр окружности равен 18 см, а хорда DB равна 12 см.

10 а) Хорда MN пересекает диаметр AB, равный 16 см, в точке K. $\angle AKM$ равен 150°. Расстояние от центра окружности до хорды равно 2 см. Чему равны длины отрезков, на которые эта хорда разделила диаметр?
б) Хорда пересекает диаметр окружности в точке M и делит его на отрезки длиной 18 см и 12 см. Найдите расстояние от центра окружности до точки M.

11 Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B (рис. *3*). Докажите, что: а) $\triangle O_1AO_2 = \triangle O_1BO_2$; б) луч O_1O_2 — биссектриса $\angle AO_1B$.

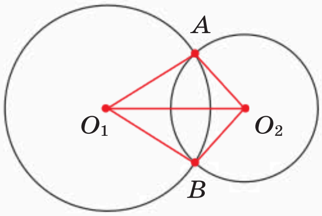


Рис. 3

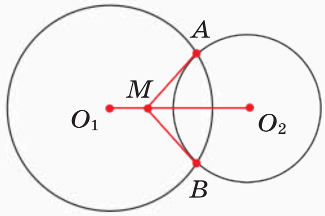


Рис. 4

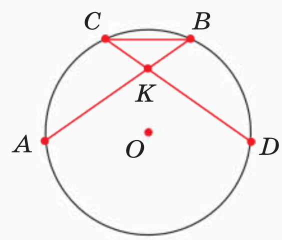


Рис. 5

К **12** а) Окружности с центрами O и O_1 пересекаются в точках M и N. Докажите, что прямая MN перпендикулярна OO_1. б) Радиусы двух концентрических окружностей относятся как $3:5$. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 8 см.

13 На рисунке *4* две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Докажите, что: а) $MA = MB$; б) $\angle O_1MA$ равно $\angle O_1MB$.

14 На рисунке *5* равные хорды AB и CD пересекаются в точке K. Докажите, что: а) треугольник CBK — равнобедренный; б) центр O окружности лежит на биссектрисе угла AKD, образованного хордами.

К **15** а) Окружности радиусов 10 см и 15 см касаются. Чему равно расстояние между центрами этих окружностей в случае внешнего касания? внутреннего касания?
б) Могут ли окружности касаться, если их радиусы равны 40 см и 35 см, а расстояние между центрами 70 см?

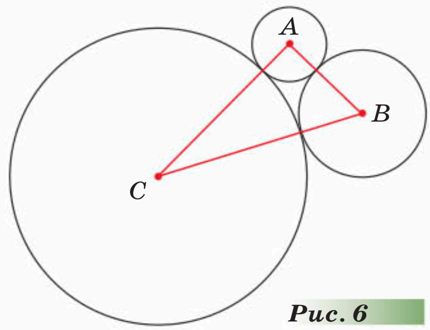


Рис. 6

К **16** а) Три окружности с центрами в точках A, B и C касаются друг друга внешним образом (рис. *6*). Найдите периметр треугольника ABC, если радиусы окружностей равны 1 см, 3 см и 7 см.
б) Три окружности с центрами в точках A, B и C касаются друг друга (рис. *7*). Найдите периметр треугольника ABC, если радиусы окружностей равны 1 см, 3 см и 7 см.

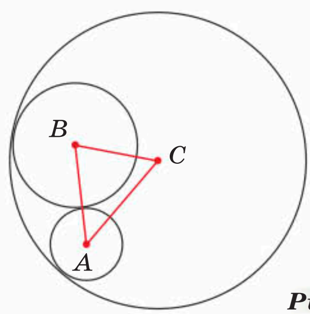


Рис. 7

17 а) Отрезок AB — диаметр окружности с центром в точке O (рис. 8). Хорды AM и BN равны, $MK \perp AB$; $NE \perp AB$. Докажите, что: а) $MK = NE$; б) $AK = BE$; в) MN — диаметр.

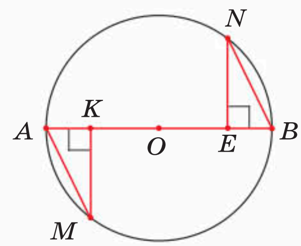


Рис. 8

18 Точки A, B и C лежат на прямой m, а точка O — вне этой прямой. Могут ли два треугольника — AOB и BOC — быть равнобедренными с основаниями AB и BC соответственно? Ответ обоснуйте.

К 19 а) На плоскости изображена окружность радиуса 3 см. Найдите геометрическое место точек — центров всевозможных окружностей радиусом 1 см, касающихся данной окружности.
б) Найдите геометрическое место точек — центров всевозможных окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку.

К 20 На какое наибольшее число частей могут делить круглый пирог четыре разреза (четыре прямые)?

К 21 На сколько частей могут разбить плоскость три окружности различных радиусов? Укажите как можно больше случаев.

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке 9 из точки M на стороны угла A опущены перпендикуляры MB и MC. Известно, что $MB = MC$.
а) Докажите, что луч AM — биссектриса угла A.
б) Найдите угол BAC, если известно, что $\angle AMB = 50°$.

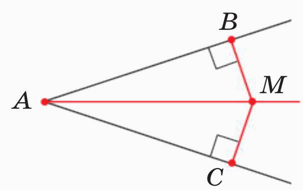


Рис. 9

2. На рисунке 10 прямые AB и CM пересекаются. Докажите, что прямые a и b, содержащие биссектрисы вертикальных углов, перпендикулярны.
3. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC.
а) AM и CN — его биссектрисы. Докажите, что $BN = BM$.
б) $AB = 15$, $\angle ABC = 120°$. Найдите медиану BE.

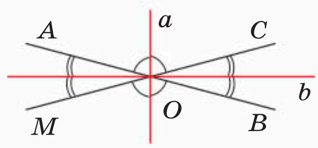


Рис. 10

п. 1.2

22 а) Прямая m касается окружности с центром O и радиусом 7 см. Чему равно расстояние от точки O до прямой m?
б) Каково взаимное расположение прямой и окружности, если радиус окружности равен 2 см, а расстояние от центра окружности до прямой равно: 3 см? 2 см? 1 см?

23 а) Может ли окружность касаться прямой в двух точках? Почему?
б) Докажите, что касательная к окружности не имеет с окружностью других общих точек, кроме точки касания.

Т 24 а) В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 16 см, $AC = BC$. Каково взаимное расположение прямой AB и окружности с центром C и радиусом 8 см? 6 см? 10 см?
б) В треугольнике ABC: $\angle C = 90°$, $AB = 2BC$, $AC = 12$ см. Каково взаимное расположение прямой AB и окружности с центром C и радиусом 6 см?

К Т **25** а) В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90°. Докажите, что прямая AC является касательной к окружности с центром в точке B и радиусом BC, а прямая AB не является касательной к окружности с центром C и радиусом CB.
б) В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 10 см, угол A равен 30°. Каким должен быть радиус окружности с центром B, чтобы она: а) касалась прямой AC; б) имела с прямой AC две общие точки; в) не имела с прямой AC общих точек?

К **26** а) Пересекутся ли две касательные к окружности, проведённые через концы диаметра? Ответ обоснуйте.
б) Найдите расстояние между двумя параллельными касательными к одной окружности, если радиус этой окружности равен 3 см.

К **27** а) Окружность касается сторон угла (рис. *11*). Докажите, что её центр лежит на биссектрисе этого угла.
б) Окружность касается сторон угла (рис. *12*). Точки касания B и C соединены отрезком BC. Докажите, что $BC \perp AO$.

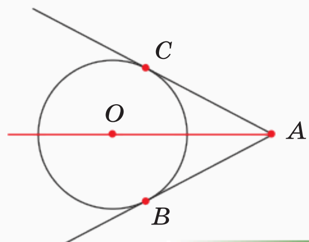


Рис. 11

28 а) Хорда AB равна радиусу окружности. Какие углы образует хорда AB с касательной в точке A?
б) Хорда AB равна радиусу окружности. Найдите угол между прямыми, касающимися окружности в концах хорды.

29 Из точки A к окружности проведены две касательные (рис. *13*). а) Найдите $\angle BAO$, если $\angle AOC = 70^\circ$. б) Найдите угол BAC, если $\angle BAM = 110^\circ$.

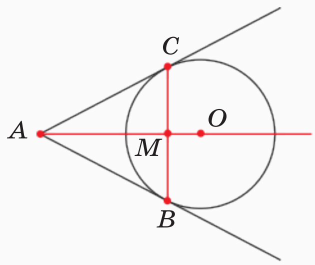


Рис. 12

30 а) В угол с вершиной B вписана окружность с центром O, касающаяся сторон угла в точках A и C (рис. *14*). Найдите величину угла AOC, если $\angle B = 42^\circ$.
б) Из точки M проведены к окружности с центром O касательные, касающиеся окружности в точках A и B (рис. *15*). Угол между касательными равен 38°. Чему равны углы OAB и AOB?

К **31** а) Прямые CA и CB — касательные к окружности с центром O. A и B — точки касания. Радиус окружности равен 4 см, $CO = 8$ см. Найдите угол AOB.
б) Прямые CA и CB — касательные к окружности с центром O. A и B — точки касания, $\angle ACB = 60^\circ$, $OC = 9$ см. Найдите радиус окружности.

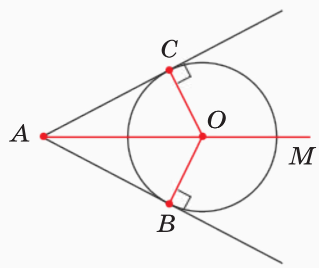


Рис. 13

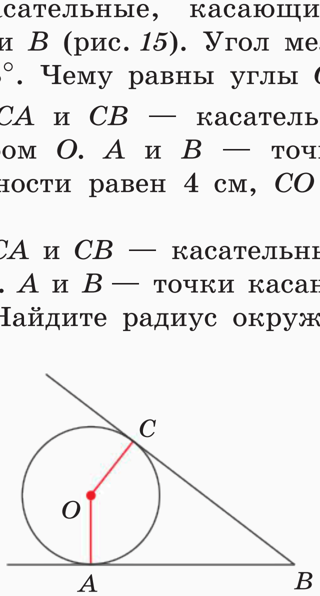


Рис. 14

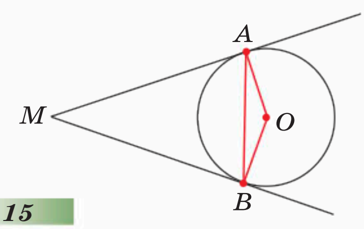


Рис. 15

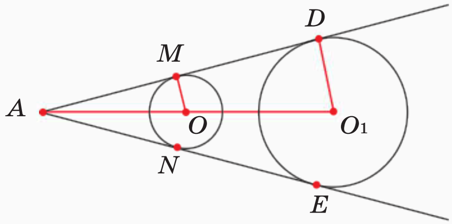


Рис. 16

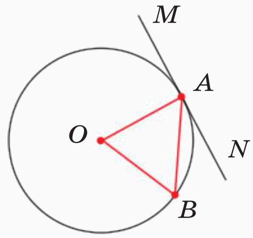


Рис. 17

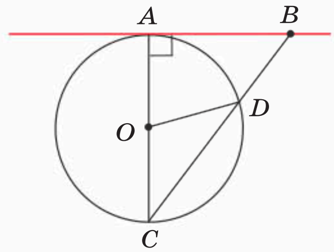


Рис. 18

32 Одна окружность касается сторон угла A в точках M и N, а другая — в точках D и E (рис. *16*). а) Докажите, что $DM = EN$. б) Найдите MD, если известно, что $AE = 12$ см, $AM = 3$ см.

33 Прямая MN касается окружности с центром O в точке A, отрезок AB — хорда окружности (рис. *17*). а) Чему равен угол NAB, если $\angle AOB = 70°$? б) Чему равен угол AOB, если $\angle NAB = 70°$?

34 а) На рисунке *18* отрезок AC — диаметр окружности, прямая AB — касательная. $\angle ABC = 50°$. Найдите угол COD.

К Т **35** **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

Начертите окружность. С соседом по парте или с группой учащихся выполните следующие задания.

1) Проведите прямую, пересекающую данную окружность. Выясните, сколько таких прямых можно провести: а) через данную точку окружности; б) через точку, не принадлежащую окружности.

2) Проведите прямую, не пересекающую данную окружность. Сколько таких прямых можно провести?

3) а) Отметьте на окружности точку A. Объясните, как построить касательную к окружности, проходящую через данную точку A. Составьте алгоритм построения и постройте эту касательную.

б) Возьмите вне окружности точку B. Объясните, как построить касательную к данной окружности, проходящую через данную точку B. Запишите алгоритм построения и выполните его.

в) Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку, расположенную вне окружности? Обоснуйте своё утверждение.

г) Сколько касательных к данной окружности можно провести через данную точку окружности? Почему?

4) Дана прямая a и точка B вне прямой a. Как построить окружность с центром в точке B, касающуюся данной прямой a? Составьте алгоритм построения окружности и выполните построение.

5) Обсудите следующие вопросы:

а) Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой?

б) Сколько можно провести окружностей, касающихся данной прямой в данной точке?

в) Сколько можно провести окружностей данного радиуса, касающихся данной прямой в данной точке?

36 Докажите, что касательные, проведённые через концы хорды, не являющейся диаметром, не могут быть параллельны.

37 К окружности радиусом 5 см проведена касательная. Найдите длину проекции наклонной, проведённой из центра окружности к касательной под углом 45°.

38 Точка M принадлежит прямой a. Найдите геометрическое место точек — центров всевозможных окружностей, касающихся данной прямой a в точке M.

39 а) На рисунке *19* окружность касается сторон угла A в точках M и N, касательная, проведённая к окружности в точке E, пересекает стороны угла в точках B и C. Чему равна длина отрезка AM, если периметр треугольника ABC равен 8 см?

б) На рисунке *19* окружность касается сторон угла A в точках M и N, касательная, проведённая к окружности в точке E, пересекает стороны угла в точках B и C, $AN = 25$ см. Чему равен периметр треугольника ABC?

в) На рисунке *19* окружность касается сторон угла A в точках M и N, касательная, проведённая к окружности в точке E, пересекает стороны угла в точках B и C. Докажите, что периметр треугольника ABC не зависит от положения точки E.

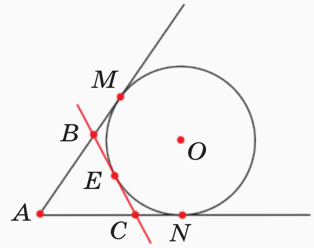


Рис. 19

40 На рисунке *20* четыре окружности касаются прямых a и b. Докажите, что прямые O_1O_3 и O_2O_4 перпендикулярны.

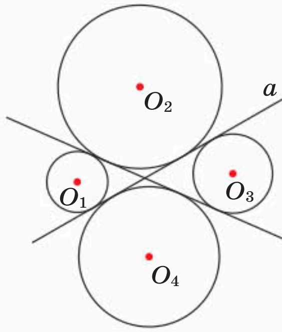


Рис. 20

ПОВТОРЯЕМ

1. На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $BD = CD$. DE — биссектриса угла ADC. Докажите, что $DE \parallel BC$.
2. Внешний угол MBC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равен 116°. Чему равны углы при основании AC?
3. В треугольнике ABC (рис. *21*): $\angle ACB = 90°$, $\angle A = 65°$, CH — высота, CD — биссектриса, CM — медиана. Найдите: а) $\angle CDB$; б) $\angle HCB$; в) $\angle BCM$; г) угол между высотой CH и медианой CM.

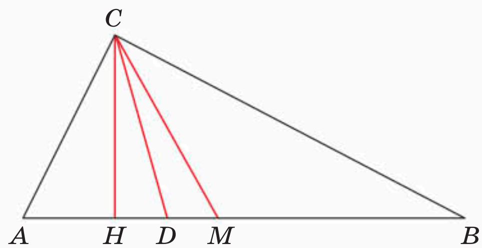


Рис. 21

П. 1.3

41 Чему равны градусные меры двух дуг окружностей, на которые её делят две точки, если градусная мера одной из дуг: а) на 100° меньше другой; б) в два раза больше другой?

Т 42 Чему равна градусная мера центрального угла окружности, опирающегося на дугу окружности, равную:

а) $\frac{1}{2}$ части окружности; б) $\frac{1}{4}$ части окружности; в) $\frac{1}{12}$ части окружности?

43 а) Две соседние спицы колеса образуют равные между собой углы величиной 15°. Сколько спиц в колесе?

б) 18 спиц колеса образуют равные углы с соседними спицами. Найдите величину каждого из этих углов.

Т 44 Найдите градусную меру дуги окружности, которую описывает конец часовой стрелки: а) за 3 часа; б) за 5 часов; в) за 3 минуты; г) за 20 минут.

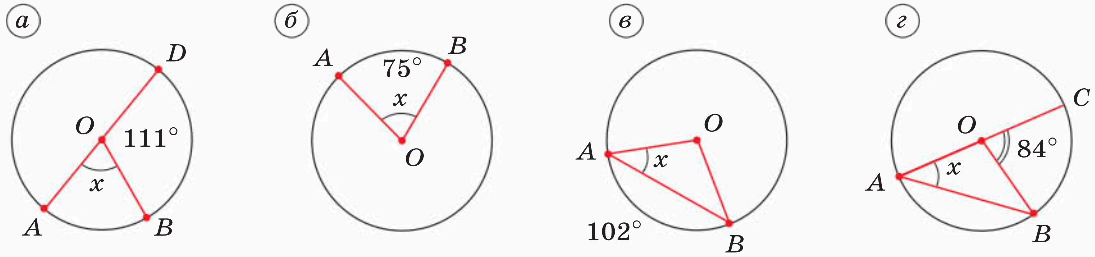


Рис. 22

Т **45** По данным рисунка *22* найдите неизвестную величину, обозначенную буквой x.

46 Отрезок AB — хорда окружности с центром в точке O (рис. *23*), $\angle OAB = 37°$. Чему равна величина меньшей из дуг, на которые хорда AB делит окружность?

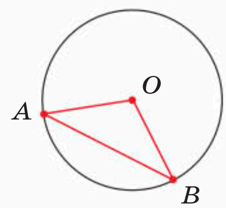


Рис. 23

К **47** а) Чему равен вписанный угол, если градусная мера дуги, на которую он опирается, равна $45°$? $150°$?
б) Величина вписанного угла равна $38°$. Найдите угловую величину дуги, на которую опирается этот угол.

Т **48** Укажите на рисунке *24* вписанные углы.

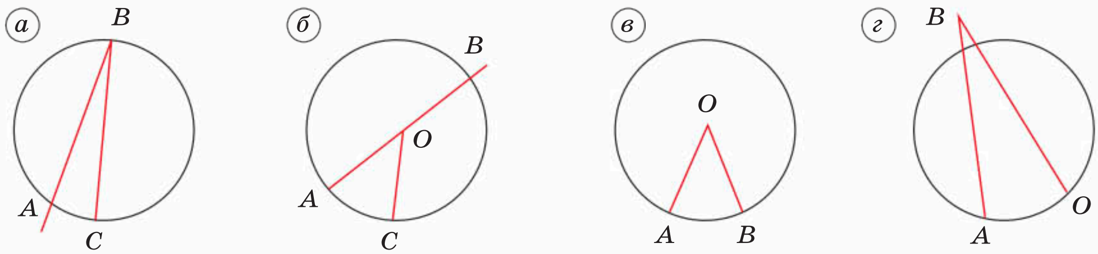


Рис. 24

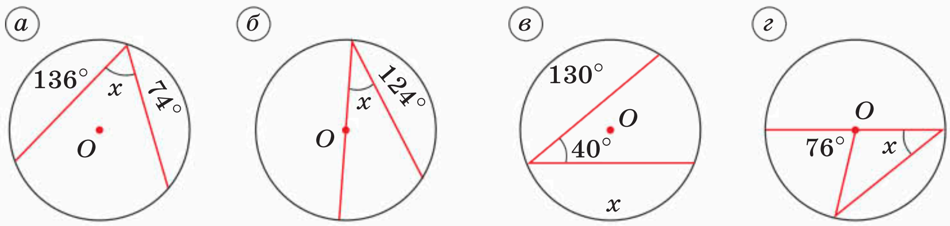


Рис. 25

Т **49** По данным рисунка *25* найдите неизвестную величину, обозначенную буквой x.

50 а) Центральный угол MON на $37°$ больше острого вписанного угла, опирающегося на дугу MN. Найдите каждый из этих углов.
б) Вписанный угол на $46°$ меньше центрального, опирающегося на ту же дугу. Чему равны эти углы?

51 а) Точки A и B разделяют окружность с центром O на две дуги, меньшая из которых равна $160°$. Чему равен вписанный угол, опирающийся на эту дугу?
б) Точки M и N разделили окружность с центром O на две дуги. Центральный угол, опирающийся на одну из дуг, равен $130°$. Найдите величину большей дуги.

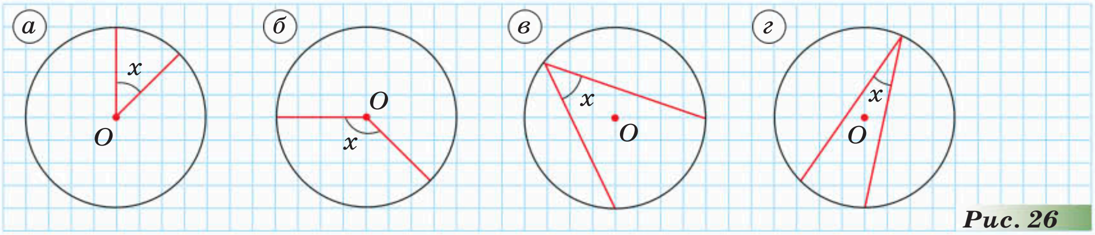


Рис. 26

Т 52 По данным рисунка *26*, используя свойства клетчатой бумаги, определите в каждом случае величину x отмеченного угла.

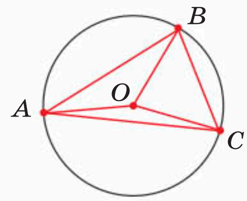


Рис. 27

53 а) Угол ABC, равный $30°$, вписан в окружность. Докажите, что длина хорды AC равна радиусу окружности.

б) Хорда MN окружности равна половине диаметра окружности. Докажите, что величина угла MAN, вписанного в окружность, равна $30°$.

К 54 а) Докажите, что биссектриса вписанного угла делит дугу, на которую этот угол опирается, пополам.

б) Докажите, что биссектриса центрального угла делит дугу, на которую этот угол опирается, пополам.

55 а) На рисунке *27*: $\angle ABC = 84°$, $\angle ACB = 56°$. Чему равна дуга BC?

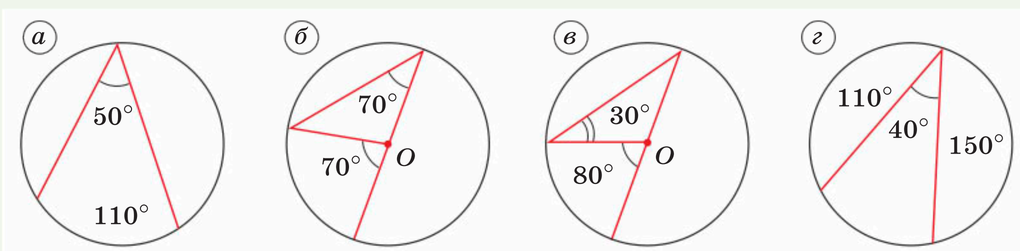
б) На рисунке *27*: $\angle AOB = 132°$, $\angle BOC = 78°$. Найдите угол ABC.

К 56 а) Докажите, что если вписанный угол — прямой, то он опирается на диаметр.

б) Точки A и B разделили окружность на две дуги: $\smile ADB$ и $\smile ACB$. Известно, что угол ADB — тупой. Докажите, что угол ACB — острый.

в) Вершины равнобедренного треугольника лежат на окружности. Угол при основании этого треугольника равен $37°$. Найдите градусные меры дуг, на которые вершины треугольника делят окружность.

Неверно! Найдите ошибки на рисунках.



57 а) Концы хорды AB делят окружность на две дуги, отношение градусных мер которых равно $4:5$. Под какими углами видна хорда AB из точек окружности?

б) На рисунке *28* хорда AB из точки K видна под углом $85°$. Под каким углом видна хорда AB из точки E?

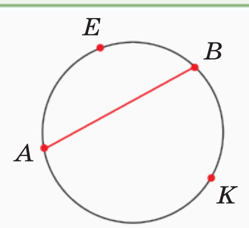


Рис. 28

58 а) Точки A, B, и C делят окружность в отношении $2:3:4$. Чему равен центральный угол, опирающийся на меньшую из дуг?
б) Точки M, K и P делят окружность в отношении $5:6:7$. Чему равен вписанный угол, опирающийся на бо́льшую из дуг?

59 а) Окружность разделили на три равные дуги. Точки деления последовательно соединили. Найдите величины углов образовавшегося треугольника.
б) Точки A, B и C делят окружность на три дуги, причём дуга AB на $20°$ меньше дуги BC и на $80°$ больше дуги AC. Чему равны углы треугольника ABC?
в) Точки A, B и C делят окружность в отношении $2:3:7$. Найдите углы треугольника ABC.

60 а) Вершины прямоугольного треугольника лежат на окружности. Один из острых его углов равен $44°$. Чему равны градусные меры дуг, на которые вершины треугольника делят окружность?
б) Вершины равнобедренного треугольника лежат на окружности. Угол при основании треугольника равен $37°$. Найдите градусные меры дуг, на которые вершины треугольника делят окружность.

61 а) Окружность разделили тремя точками на дуги, градусные меры которых относятся как $2:3:4$. Точки последовательно соединили отрезками. Каков вид получившегося треугольника?
б) На окружности взяли три точки и соединили последовательно отрезками. Получили тупоугольный треугольник. Сравните бо́льшую из образовавшихся дуг окружности с полуокружностью.

62 а) На рисунке *29*: AB и AC — касательные к окружности с центром O. Точки B и C делят окружность в отношении $4:5$. Чему равна величина угла BAC?
б) Угол между касательными, проведёнными из одной точки к окружности, равен $64°$. Чему равны величины дуг, на которые точки касания делят окружность?

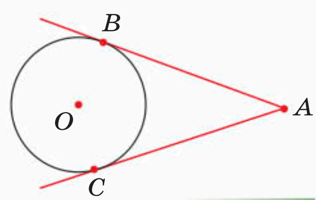


Рис. 29

63 На рисунке *30* точка O — центр окружности. $\angle AOB = 75°$, $AO = BC$. Найдите: а) величину угла ODC; б) величину угла COD.

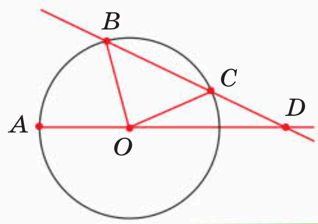


Рис. 30

64 а) На стороне равностороннего треугольника как на диаметре построена окружность. Докажите, что полуокружность делится двумя другими сторонами треугольника на равные дуги.
б) Из конца диаметра AB проведена хорда AC, делящая полуокружность на дуги в отношении $3:2$. Вычислите величины углов треугольника ABC.

65 Окружности касаются друг друга внутренним образом, причём меньшая из них проходит через центр большей. Докажите, что меньшая окружность делит пополам любую хорду большей окружности, проведённую из точки касания.

ПОВТОРЯЕМ

1. В треугольнике ABC: AH — высота треугольника, $\angle B = 108°$. Найдите углы треугольника ABH.
2. Докажите, что прямые a и b параллельны, если они отсекают на параллельных прямых m и n равные отрезки.

П. 1.4

66 а) Прямая a касается окружности с центром O в точке C. Хорда DC образует с касательной угол 72°. Чему равен угол ODC?
б) Прямая a касается окружности с центром O в точке C. Найдите угол между касательной и хордой CD, если угол ODC равен 24°.

67 На рисунке *31*: AB — касательная, точка B — точка касания, точка O — центр окружности, $\angle BOC = 112°$. Найдите: а) $\angle BAC$; б) $\angle ACB$. Обсудите с соседом по парте условие задачи и попробуйте решить задачу разными способами.

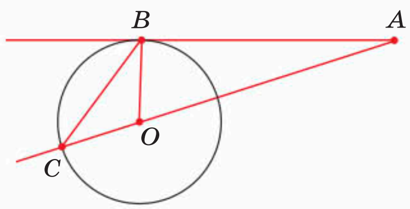


Рис. 31

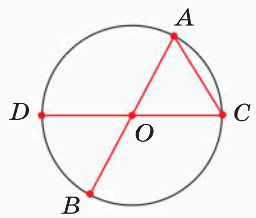


Рис. 32

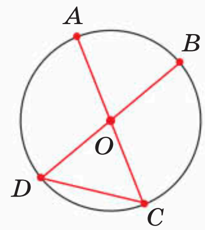


Рис. 33

68 а) AB и CD — диаметры окружности с центром O (рис. *32*). Вписанный угол CAB равен 60°. Чему равна хорда AC, если $DC = 5$?
б) AC и BD — диаметры окружности с центром O (рис. *33*). Угол DBC равен 30°, $AC = 9$. Чему равна хорда DC?

69 В окружность радиуса 3 см и центром O вписан угол ABC, равный 30°. Чему равен периметр треугольника AOC?

70 а) Отрезок AB — диаметр окружности, AC — хорда, AE — касательная, причём луч AE образует с хордой AC острый угол CAE. Докажите, что $\angle ABC = \angle EAC$.
б) Угол ABC вписан в окружность с диаметром AC. Через точку C проведена касательная CM. Докажите, что $\angle MCB = \angle BAC$.

71 Через концы диаметра AB окружности с центром O проведены параллельные хорды BM и AN. Докажите, что: а) $AM = BN$; б) $\angle MAB = \angle ABN$.

72 Радиус OM окружности с центром O перпендикулярен хорде AB и пересекает её в точке E. Известно, что $OE = EM$.
а) Докажите, что $\triangle AMO = \triangle BMO$.
б) Найдите периметр четырёхугольника $AMBO$, если $OM = 4{,}5$. Обсудите с соседом по парте и предложите различные варианты решения задачи.

73 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

1. Проведите окружность и отметьте на ней дугу AB. Как разделить данную дугу на 2 равные части? Составьте план решения и разделите дугу AB точкой C пополам.
2. Дана окружность и не задан её центр. а) Как построить диаметр окружности? Опишите построение. б) Как построить центр такой окружности? Задайте алгоритм построения и постройте центр окружности.

Неверно! Почему данное высказывание неверно? Исправьте высказывание, чтобы оно стало верным.
«Диаметр окружности, проведённый через середину хорды, перпендикулярен этой хорде».

74 Обсудите с соседом по парте высказывания и укажите верные из них.
1. Через точку, принадлежащую окружности, проходит единственная касательная к ней.
2. Через точку, расположенную вне окружности, можно провести единственную касательную к этой окружности.
3. Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.
4. Центральный угол измеряется половиной дуги, на которую опирается.
5. Центральный угол в два раза больше вписанного, опирающегося на ту же дугу.
6. Если диаметр окружности перпендикулярен хорде, то он делит её пополам.
7. Угол между касательной к окружности и хордой, проведённой из точки касания, равен вписанному углу, опирающемуся на дугу, заключённую между касательной и хордой.
8. Вписанные углы, опирающиеся на дуги, заключённые между параллельными хордами, равны.
9. Если хорды окружности равны, то равны и дуги, стягиваемые этими хордами.
10. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, — прямой.

75 В окружности хорды AB и CD — параллельны, хорды AD и BC пересекаются в точке M. Докажите, что: а) треугольники AMB и CMD — равнобедренные; б) $\angle AMC = \angle BAD + \angle BCD$.

76 Хорда окружности параллельна касательной. Докажите, что меньшие дуги, заключённые между точкой касания и концами хорды, равны.

77 а) Докажите, что угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, одна из которых расположена внутри этого угла, а другая — внутри угла, вертикального данному.
б) Найдите величину угла AMD (рис. *34*), если $\smile AC = 120°$, $\smile BD = 130°$.

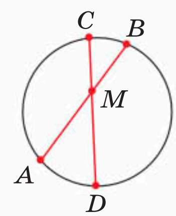


Рис. 34

78 а) Докажите, что угол, вершина которого расположена вне окружности, а каждая сторона является секущей окружности, измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри угла.
б) Через точку, лежащую вне окружности, проведены две секущие, образующие угол в 28°. Меньшая дуга окружности, заключённая между сторонами угла, равна 36°. Найдите бо́льшую дугу, заключённую между сторонами угла.

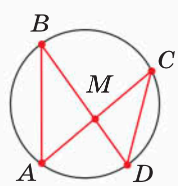


Рис. 35

79 На рисунке *35*: $\angle ABD = 36°$, $\angle BMC = 84°$. Найдите величину угла BDC.

К **80** Даны окружность и точка внутри неё. Постройте наименьшую хорду, проходящую через эту точку.

ПОВТОРЯЕМ

1. Докажите, что произвольная точка O биссектрисы угла равноудалена от его сторон.
2. На рисунке *36*: $\triangle ABC$ — остроугольный, BD — его биссектриса, $DE \perp BC$. Докажите, $\angle ABD = \angle EDC$.
3. Сумма двух углов треугольника и внешнего к третьему углу равна 144°. Найдите этот третий угол.

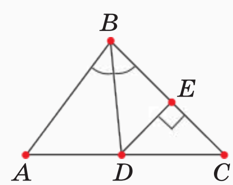


Рис. 36

П. 1.5

К Т 81 В треугольнике ABC биссектрисы AD, BM, CE пересекаются в точке O. $\angle BAC = 26^\circ$, $\angle ABC = 40^\circ$. Найдите: а) $\angle AOM$; б) $\angle AOC$; в) $\angle EOM$.

Т 82 1) Проведите окружность с центром в точке O и возьмите на окружности точки A, B и C так, чтобы ни один из отрезков AB, BC, AC не был диаметром окружности. Проведите радиусы окружности в эти точки.
2) Проведите через точки A, B и C касательные к данной окружности. Чему равно расстояние от центра окружности до касательных, если радиус данной окружности равен 3 см? Рассмотрите треугольник, образованный проведёнными касательными. Является ли данная окружность вписанной в этот треугольник?

Т 83 Перерисуйте в тетрадь рисунок *37*. Пользуясь угольником, циркулем и линейкой со шкалой, проведите через точки A, B и C окружность.

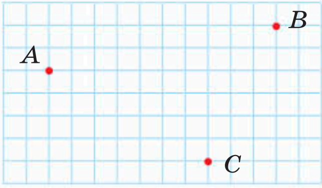


Рис. 37

К Т 84 а) Начертите разносторонний треугольник.
1) Пользуясь транспортиром и линейкой, найдите центр окружности, вписанной в данный треугольник.
2) Найдите с помощью угольника точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.
3) Впишите окружность в данный треугольник.
б) Начертите равнобедренный треугольник и выполните такие же задания, как и в пункте а).

85 а) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, $\angle ACB = 60^\circ$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC, если $OC = 14$.
б) В треугольнике ABC угол A равен 60°, биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Расстояние от точки O до прямой AB равно 6. Найдите расстояние от точки O до вершины A треугольника.

86 а) Докажите, что центр вписанной в равнобедренный треугольник окружности принадлежит высоте, проведённой к его основанию.
б) Докажите, что если центр вписанной окружности принадлежит медиане треугольника, то этот треугольник — равнобедренный.

87 а) В треугольник ABC вписана окружность с центром O. Чему равен угол AOB, если угол C равен 64°?
б) В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, $\angle AOC = 110^\circ$. Чему равен угол ABO?

88 а) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, N, E (рис. *38*). $AM = 4$ см, $BN = 2$ см, $EC = 8$ см. Найдите P_{ABC}.
б) Окружность, вписанная в треугольник, касается его сторон в точках M, N и E. $AM = 10$ см, $BN = 4$ см, $P_{ABC} = 40$ см. Чему равна сторона AC?

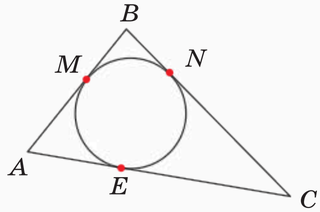


Рис. 38

89 а) Боковая сторона и основание равнобедренного треугольника равны соответственно 5 см и 4 см. Чему равны длины отрезков, на которые делятся стороны треугольника точками их касания с окружностью, вписанной в этот треугольник?
б) В треугольнике ABC: $AB = BC = 18$, $P_{ABC} = 48$. Точка O — центр окружности, вписанной в тре-

угольник ABC (рис. *39*). Вычислите длины отрезков AM и BN.

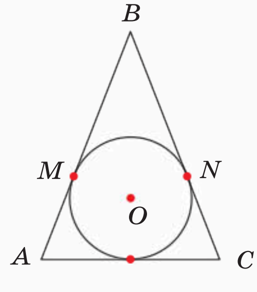


Рис. 39

90 а) Точка касания вписанной в равнобедренный треугольник окружности делит его боковую сторону на отрезки 2 см и 5 см, считая от основания. Чему равен периметр треугольника?
б) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN \parallel AC$.
в) Боковая сторона равнобедренного треугольника делится точкой касания вписанной в треугольник окружности в отношении $8:5$. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 252 см. Сколько решений имеет эта задача?

91 а) В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC вписана окружность. Точка O — её центр. Чему равны углы AOB, AOC, BOC?
б) В равносторонний треугольник ABC вписана окружность с центром в точке O. Чему равны углы AOB, AOC, BOC?

92 а) В треугольник с углами $50°$, $60°$ и $70°$ вписана окружность. Найдите углы треугольника, вершинами которого являются точки касания вписанной окружности сторон данного треугольника.
б) Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон треугольника в точках D, F и K. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника DFK равны $52°$, $56°$ и $72°$.

93 а) Около окружности радиуса 2 описан прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 10. Чему равен периметр треугольника?
б) Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с периметром 12 см и гипотенузой, равной 5 см.

94 а) Найдите диаметр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с периметром P и гипотенузой, равной a.
б) Сумма длин катетов прямоугольного треугольника равна 14. Радиус вписанной окружности равен 2. Чему равна длина гипотенузы?

95 Касательная к окружности, вписанной в треугольник ABC, пересекает стороны BC и AC в точках K и P соответственно. Чему равен периметр треугольника PKC, если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$?

96 В треугольнике ABC: $\angle A > \angle B > \angle C$. К какой из вершин треугольника ближе всего расположен центр вписанной в него окружности?

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке *40*: $AB = BC$, BH — биссектриса. Докажите несколькими способами, что треугольник ADC — равнобедренный.
2. Докажите, что каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов отрезка.

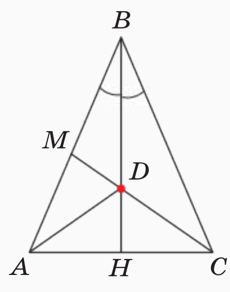


Рис. 40

П. 1.6

Т 97 Начертите разносторонний треугольник ABC. Как определить центр описанной около этого треугольника окружности? Постройте с помощью чертёжного угольника точку — центр описанной около треугольника окружности.

К **98** а) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектриса угла B пересекает серединный перпендикуляр к стороне BC в точке O. Найдите AO, если $BO = 4$ см.
б) Серединные перпендикуляры к сторонам равнобедренного треугольника пересекаются в точке O. Один из углов треугольника равен 120°, боковая сторона равна 10. Найдите расстояние от точки O до середины основания.

Т **99** а) В треугольнике ABC с прямым углом ACB отрезок CM является медианой, $\angle A = 47^\circ$. Чему равен угол BCM?
б) В прямоугольном треугольнике ABC угол C равен 90°, медиана CM образует с катетом AC угол, равный 34°. Чему равен угол CBM?

К **100** а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике центром описанной около него окружности является середина гипотенузы.
б) Докажите, что если радиус описанной около треугольника окружности равен половине его стороны, то треугольник — прямоугольный.

К Т **101** а) Докажите, что в равностороннем треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают.
б) В каком соотношении находятся радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника? Найдите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 8 см.

102 а) Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ABC пересекаются в точке O, $AO = 12$ см, $\angle BOA = 60^\circ$. Чему равна сторона AB?
б) В треугольнике MNP биссектрисы углов M и N пересекаются в точке O, $MN = PN$, $\angle PON = 125^\circ$. Чему равен угол PMN?

103 а) Около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC описана окружность с центром O. Докажите, что: 1) $\angle AOB = \angle COB$. 2) Найдите $\angle AOC$, если $\angle ABC = 56^\circ$.
б) Центр окружности, описанной около треугольника ABC, принадлежит медиане BM, $\angle AOC = 140^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

104 а) Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как $23 : 7 : 6$, меньшая сторона равна 8 см. Чему равен радиус описанной около треугольника окружности?
б) Вершины вписанного в окружность треугольника делят её в отношении $3 : 2 : 1$. Бóльшая сторона треугольника равна 17 см. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

105 Центр описанной около треугольника окружности лежит на медиане. Докажите, что этот треугольник либо прямоугольный, либо равнобедренный.

106 Найдите величину большего угла треугольника, если две его стороны видны из центра описанной около него окружности под углами 100° и 120°.

107 а) В прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен 3, а радиус описанной окружности равен 7. Чему равен его периметр?
б) Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

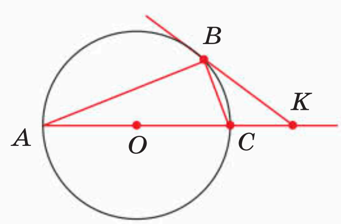


Рис. 41

108 На рисунке *41* треугольник ABC вписан в окружность, AC — диаметр окружности, $\angle A = 30^\circ$, BK — касательная, $CK = 4$. Найдите AC.

109 Равнобедренный треугольник ABC вписан в окружность (рис. 42). DB и DC — касательные к окружности. $\angle ABC = \angle ACB = 2\angle BDC$. Найдите градусную меру угла A.

110 В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на высоте BH как на диаметре построена окружность, пересекающая сторону BC в её середине. Найдите углы треугольника ABC.

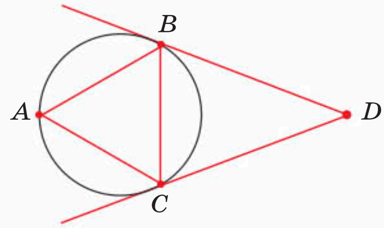


Рис. 42

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Дайте определение окружности.
- Объясните, что такое центр, радиус и диаметр окружности. Что такое круг?
- Докажите, что никакие три точки окружности не лежат на одной прямой.
- Сколько общих точек имеют прямая и окружность в зависимости от соотношения между радиусом окружности и расстоянием от её центра до прямой?
- Какая прямая называется секущей по отношению к окружности?
- Какая прямая называется касательной к окружности? Какая точка называется точкой касания прямой и окружности?
- Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной.
- Докажите, что отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.
- Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме о свойстве касательной.
- Объясните, что такое хорда и дуга окружности.
- Какой угол называется центральным углом окружности?
- Объясните, какая дуга называется полуокружностью.
- Как определяется градусная мера дуги? Как она обозначается?
- Сформулируйте и докажите теорему об угле между касательной и хордой.
- Какой угол называется вписанным? Сформулируйте и докажите теорему о вписанном угле.
- Докажите, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
- Докажите, что вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой.
- Докажите, что если диаметром окружности является гипотенуза прямоугольного треугольника, то вершина прямого угла треугольника лежит на этой окружности.

ГЛАВА **2**

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

- ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК И ЕГО СВОЙСТВА
- ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО СВОЙСТВА
- ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА
- ПРЯМОУГОЛЬНИК
- РОМБ
- КВАДРАТ
- СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА
- ТРАПЕЦИЯ
- ТЕОРЕМА ФАЛЕСА
- ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

ИНТЕРЕСНО

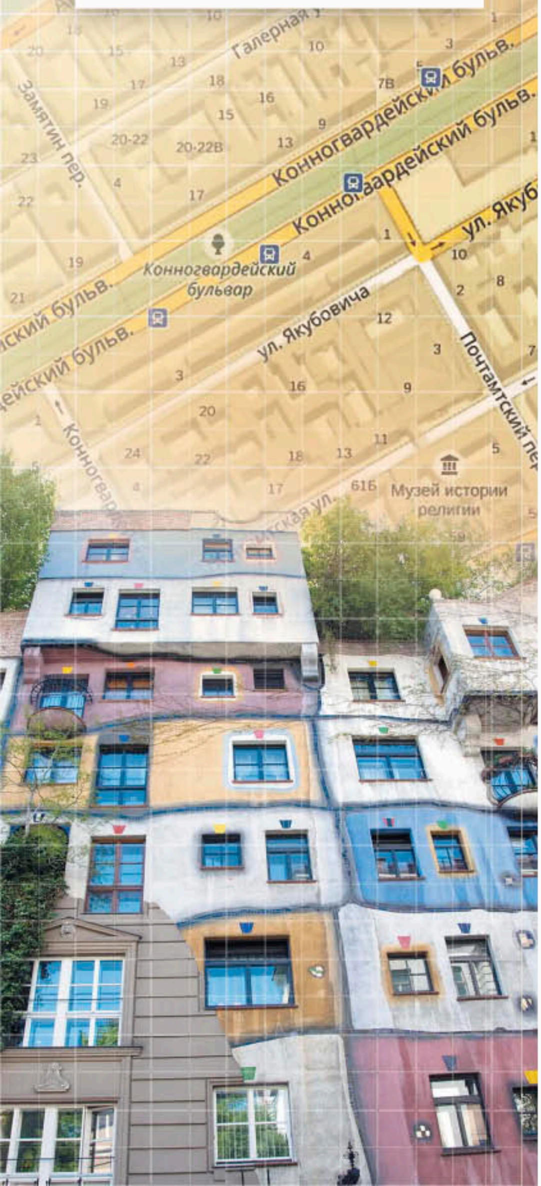
Фалеса Милетского, древнегреческого философа и математика, жившего около 625—547 гг. до н. э., современники называли первым из семи греческих мудрецов, заложивших основы греческой культуры и государственности. Фалес является основателем милетской (ионийской) философской школы, с которой начинается история европейской науки. Именно Фалес открыл грекам научные знания египтян и вавилонян. Он создал и ввёл в обиход календарь по египетскому подобию: год состоял из 12 месяцев по 30 дней и 5 выпадающих дней; нашёл способ определять расстояние от берега до видимого корабля, создав дальномер, для чего использовал свойство подобия треугольников; изменил русло реки, спроектировав плотину и водоотводный канал; точно предсказал солнечное затмение 585 г. до н. э.; изобрёл глобус; дал первые представления об электричестве и магнетизме. Фалес был первым из математиков, кто разработал систему доказательств, придав геометрии черты науки, весьма сходной с той, что знакома нам со школьной скамьи.

2.1 ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК И ЕГО СВОЙСТВА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какая фигура называется четырёхугольником
- Чему равна сумма углов четырёхугольника

Рис. 2.1



Чтобы получить треугольник, надо взять три точки, не лежащие на одной прямой, и соединить их тремя отрезками (рис. *2.1*). А как получить четырёхугольник? Очевидно, надо взять четыре точки и соединить их четырьмя отрезками. Вопрос в том, каким образом это сделать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА Возьмём на плоскости четыре точки и обозначим их A, B, C и D. Понятно, что все четыре точки не должны лежать на одной прямой (рис. *2.2*). Тогда возможны два случая взаимного расположения точек.

1-й случай. Три из четырёх точек лежат на одной прямой.

Соединяя точки в этом случае, четырёхугольник мы не получим (рис. *2.3*).

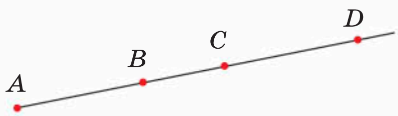


Рис. 2.2

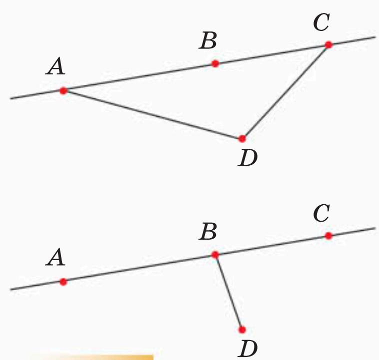


Рис. 2.3

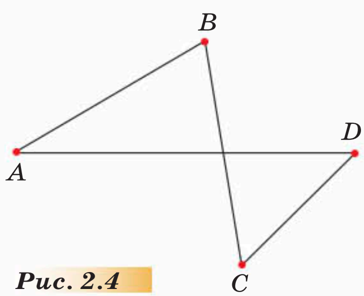


Рис. 2.4

2-й случай. Никакие три из четырёх точек не лежат на одной прямой.

Будем последовательно соединять отрезками точки A, B, C и D. При этом отрезки могут пересекаться, как на рисунке *2.4*, и тогда четырёхугольника не получим, а могут и не пересекаться. В этом случае четырёхугольник получится (рис. *2.5*).

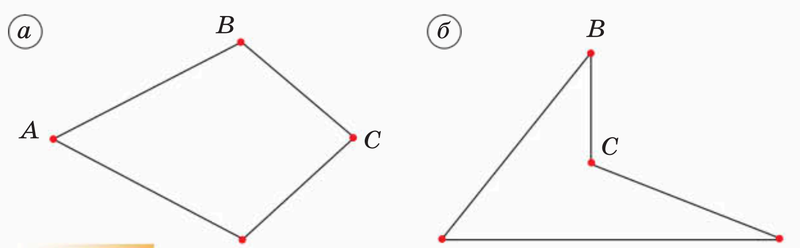


Рис. 2.5

Определение. **Четырёхугольником** называется фигура, состоящая из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

Данные точки называются **вершинами четырёхугольника**, а соединяющие их отрезки — его **сторонами**.

Углы ABC, BCD, CDA и DAB называются **углами четырёхугольника** $ABCD$.

Вершины четырёхугольника называются соседними, если они являются концами одной его стороны. Например, вершины A и B на рисунке *2.5* — соседние.

Вершины четырёхугольника, не являющиеся соседними, называются противоположными (например, вершины A и C на рисунке *2.5, а*).

Стороны четырёхугольника, исходящие из одной вершины, называются смежными или соседними (например, стороны AB и AD на рисунке *2.5, а*).

Две несмежные стороны четырёхугольника называются противоположными (как стороны AB и CD на рис. *2.5, а*).

Определение. Отрезки, соединяющие противоположные вершины четырёхугольника, называются **диагоналями**. На рисунке *2.6*: AC и BD — диагонали.

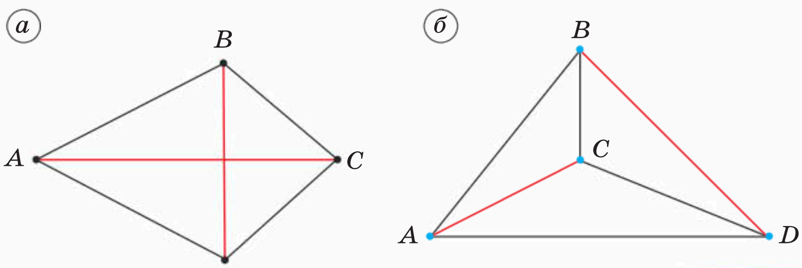


Рис. 2.6

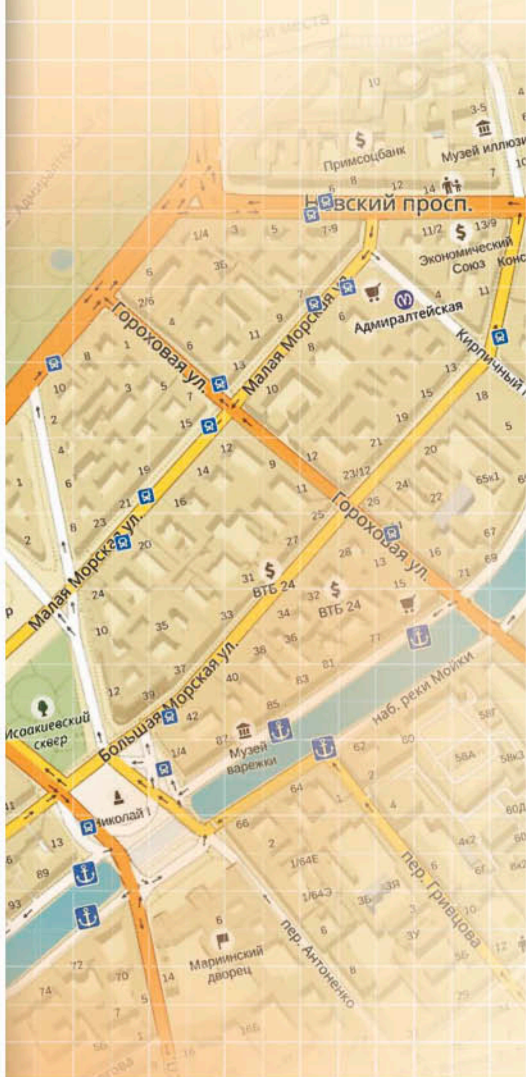
Четырёхугольник обозначается последовательным указанием его вершин, причём буквы, которые стоят рядом, должны обозначать соседние вершины. Так, четырёхугольник на рисунке *2.6, а* можно обозначить $ABCD$, $DABC$, $ADCB$ и т. д., но нельзя обозначить, например, $ACDB$ или $BDCA$.

Определение. **Периметром четырёхугольника** называется сумма длин всех его сторон.

Периметр четырёхугольника, как и периметр треугольника, обозначают буквой P:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

Вершины четырёхугольника принято обозначать любыми прописными буквами латинского алфавита. Чаще всего четырёхугольники обозначают $ABCD$ по первым буквам латинского алфавита.



ВЫПУКЛЫЕ И НЕВЫПУКЛЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ Любой четырёхугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая — внешней областью четырёхугольника. На рисунке *2.7* внутренние области четырёхугольников выделены цветом.

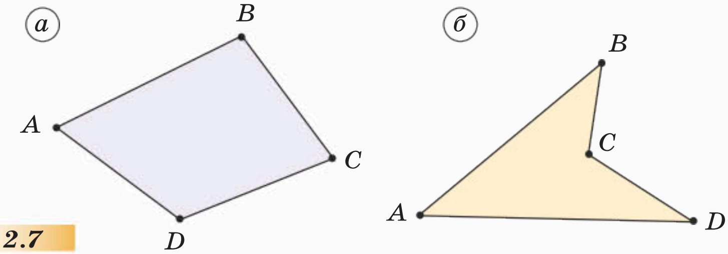


Рис. 2.7

> Фигуру, состоящую из сторон четырёхугольника и его внутренней области, также называют четырёхугольником.

На рисунке *2.8* изображены два четырёхугольника *ABCD* и *MKOP* и проведены прямые, содержащие стороны четырёхугольников.

Эти прямые не проходят через внутреннюю область четырёхугольника *ABCD*, четырёхугольник *ABCD* расположен по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

Четырёхугольник *ABCD* называют выпуклым.

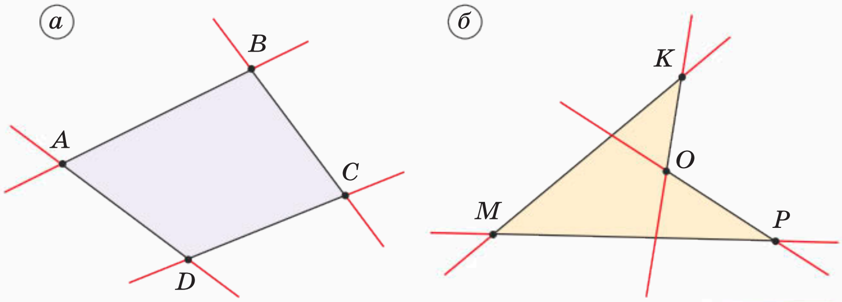


Рис. 2.8

В четырёхугольнике *MKOP* прямые *KO* и *OP* проходят через внутреннюю область четырёхугольника *MKOP*. Такой четырёхугольник не является выпуклым.

Определение. Четырёхугольник называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону.

Если четырёхугольник выпуклый, то каждая диагональ делит четырёхугольник на два треугольника.

В дальнейшем мы будем рассматривать выпуклые четырёхугольники (другие случаи будут оговариваться особо).

СУММА УГЛОВ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

Довольно часто, чтобы решить задачу, в которой фигурирует четырёхугольник, нужно выполнить дополнительное построение — провести диагональ четырёхугольника.

Диагональ делит четырёхугольник на два треугольника (рис. *2.9*), это даёт возможность использовать свойства треугольника при решении задачи или доказательстве теорем.

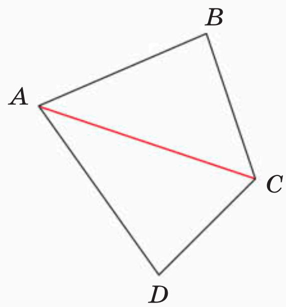


Рис. 2.9

ТЕОРЕМА. Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°.

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$ и проведём в нём диагональ AC (рис. *2.10*).

Диагональ AC разделила четырёхугольник на два треугольника: ABC и ACD.

Так как $\angle DAB = \angle 1 + \angle 2$, $\angle BCD = \angle 3 + \angle 4$, то сумма углов четырёхугольника $ABCD$ равна сумме всех углов треугольников ABC и ACD, то есть равна $180° \cdot 2 = 360°$. ▼

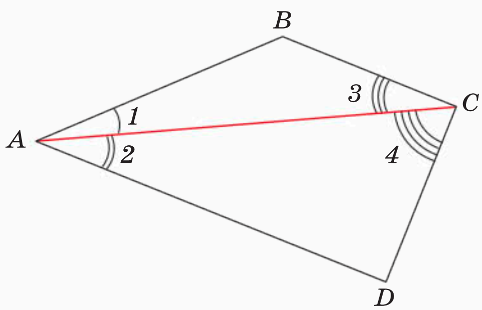


Рис. 2.10

Пользуясь тем же приёмом, докажите, что каждая сторона четырёхугольника меньше суммы трёх других его сторон.

Задача. Докажите, что длина любой стороны четырёхугольника меньше суммы длин трёх других его сторон.

Решение. Рассмотрим произвольный четырёхугольник $ABCD$ (рис. *2.9*). Докажем, например, что $AB < BC + CD + AD$.

Проведём диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и ADC.

Из неравенства треугольника получим:

из треугольника ABC: $AB < AC + BC$,

из треугольника ADC: $AC < CD + AD$.

Сложив почленно равенства, получим:

$$AB + AC < AC + BC + CD + AD, \text{ то есть}$$
$$AB < BC + CD + AD.$$

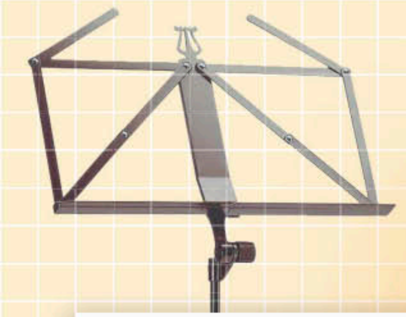
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Начертите четырёхугольник $BCDE$.
  а) Сколько соседних вершин имеет вершина четырёхугольника? сколько противоположных? Назовите соседние и противоположные вершины для вершины C, для вершины D.
  б) Сколько смежных сторон имеет сторона четырёхугольника? сколько противоположных? Назовите смежные и противоположные стороны для стороны BC, стороны CD.
- Вершинами четырёхугольника являются точки E, F, K и L. Известно, что EF – сторона четырёхугольника, а KF – его диагональ.
  а) Назовите данный четырёхугольник. Можно его назвать $EFKL$? $LKEF$?
  б) Укажите другую диагональ четырёхугольника.
  в) Какие стороны этого четырёхугольника являются противоположными?
- Чему равна сумма углов выпуклого четырёхугольника?
- С соседом по парте докажите друг другу теорему о сумме углов выпуклого четырёхугольника.
- Сколько острых углов может быть в четырёхугольнике? сколько тупых?

2.2 ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО СВОЙСТВА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какой четырёхугольник называют параллелограммом
- Свойства параллелограмма



При пересечении двух параллельных прямых двумя другими параллельными прямыми образуется четырёхугольник (рис. *2.11*). Задача этого пункта — выяснить, в чём особенность такого четырёхугольника, какими свойствами он обладает.

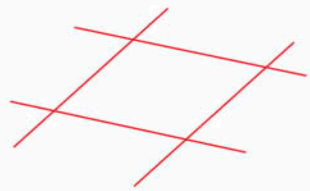


Рис. 2.11

КАКОЙ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИК НАЗЫВАЕТСЯ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОМ

Определение. Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется **параллелограммом** (рис. *2.12*).

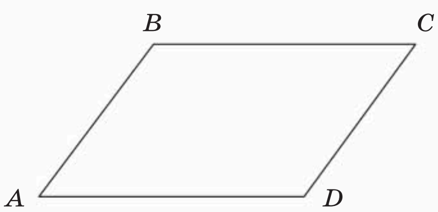


Рис. 2.12

Теорема. Параллелограмм — выпуклый четырёхугольник.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. *2.13*).

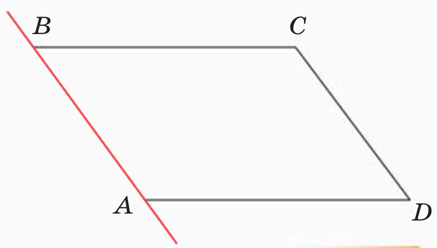


Рис. 2.13

Докажем, что параллелограмм лежит по одну сторону от прямой AB.

$AB \parallel CD$, поэтому прямая CD не имеет общих точек с AB. Иными словами, прямая CD, а значит, и отрезок CD лежит по одну сторону от прямой AB. Тогда и отрезки AD и BC лежат по ту же сторону от прямой AB. Таким образом, весь параллелограмм $ABCD$ лежит по одну сторону от прямой AB.

Аналогично доказывается, что данный параллелограмм лежит по одну сторону и от прямых BC, CD и AD.

Значит, параллелограмм — выпуклый четырёхугольник. ▼

СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА Из определения параллелограмма следуют свойства:

1. Противоположные стороны параллелограмма параллельны.

2. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°.

Доказательство. В самом деле, так как углы параллелограмма, прилежащие к одной стороне, — это внутренние односторонние углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, то их сумма равна 180°. ▼

Параллелограмм обладает ещё рядом замечательных свойств.

ТЕОРЕМА. **В параллелограмме:**
1) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника;
2) противоположные стороны равны;
3) противоположные углы равны.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. *2.14*).

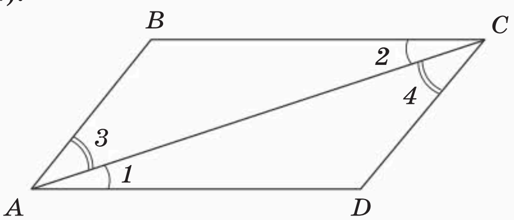
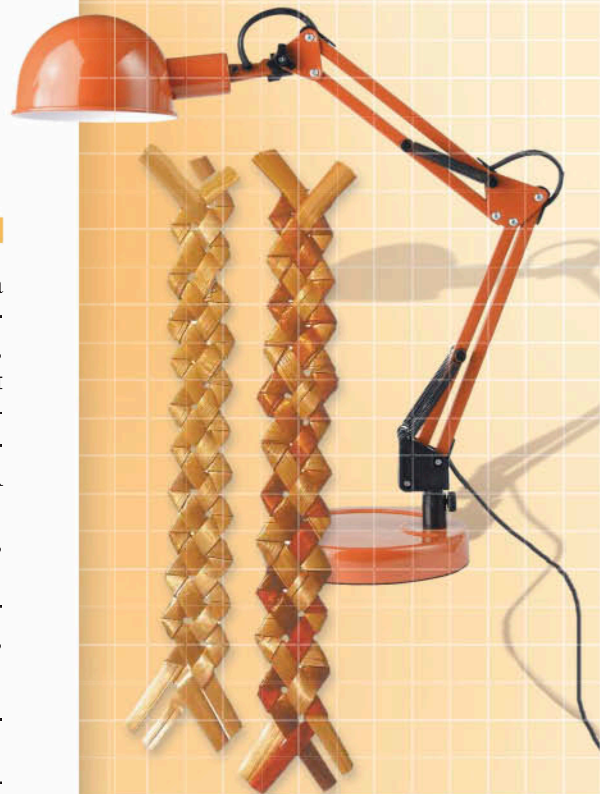


Рис. 2.14

Диагональ AC разделяет параллелограмм на два треугольника: ABC и CDA. В этих треугольниках сторона AC — общая, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми BC и AD и секущей AC, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AB и CD и секущей AC. Следовательно, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников следует, что $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle B = \angle D$.

Кроме того, из равенств $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ следует равенство $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Но $\angle 1 + \angle 3 = \angle A$, а $\angle 2 + \angle 4 = \angle C$. Значит, $\angle A = \angle C$. ▼



ТЕОРЕМА. **Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.**

Доказательство. На рисунке *2.15* диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажем, что $AO = OC$, $BO = OD$.

Рассмотрим треугольники AOD и COB. В этих треугольниках $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AD и BC и секущими AC и BD соответственно. $AD = BC$ по доказанному выше свойству параллелограмма. Следовательно, треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $AO = OC$, $BO = OD$. ▼

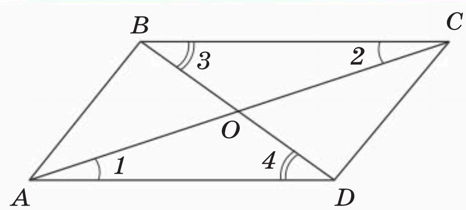


Рис. 2.15

СЛЕДСТВИЕ. **Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.**

Действительно, пусть точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма (рис. *2.16*).

Каждый отрезок MN, который проходит через точку O и концы которого принадлежат противоположным сторонам параллелограмма, делится этой точкой пополам, то есть точка O является центром симметрии таких отрезков. Значит, для каждой точки параллелограмма симметричная ей относительно точки O точка тоже принадлежит параллелограмму.

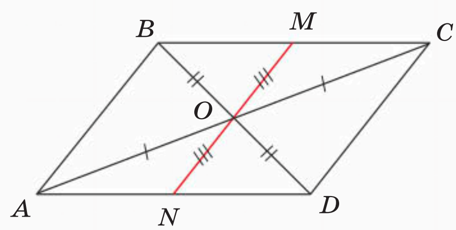
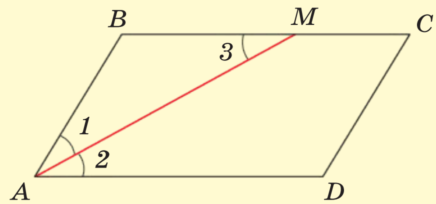


Рис. 2.16

Задача 1. Докажите, что биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
Дано: $ABCD$ — параллелограмм. AM — биссектриса.
Доказать: $\triangle ABM$ — равнобедренный.

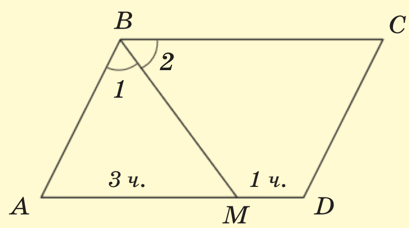
Доказательство.



1. $ABCD$ — параллелограмм по условию, значит, $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AD и BC и секущей AM.
2. AM — биссектриса угла A по условию, значит, $\angle 1 = \angle 2$.
3. Из пунктов 1, 2 следует, что $\angle 1 = \angle 3$, значит, треугольник ABM — равнобедренный с основанием AM.

Случай, когда проведена биссектриса тупого угла, рассматривается аналогично.

Задача 2. Периметр параллелограмма равен 70 дм. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении 3 : 1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм.
$P_{ABCD} = 70$ дм.
BM — биссектриса.
$AM : MD = 3 : 1$.
Найти: AB, BC, CD, AD.

Решение.

1. $\triangle ABM$ — равнобедренный (см. задачу 1) с основанием BM. Отсюда $AB = AM$.
2. $AM : MD = 3 : 1$ по условию. Пусть $MD = x$ дм, тогда $AB = AM = 3x$ дм.
$$AD = AM + MD = 3x \text{ дм} + x \text{ дм} = 4x \text{ дм}.$$
3. $AB = CD$, $BC = CD$ как противолежащие стороны параллелограмма, отсюда $P_{ABCD} = 2(AB + AD)$. По условию $P_{ABCD} = 70$ дм.

Получаем уравнение
$$2(3x + 4x) = 70; \quad 14x = 70; \quad x = 5.$$
Следовательно, $AB = CD = 3 \cdot 5 = 15$ дм, $BC = AD = 4 \cdot 5 = 20$ дм.

Ответ: 15 дм, 20 дм, 15 дм и 20 дм.

ВЫСОТА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА Как и в треугольнике, в параллелограмме можно провести высоты.

На рисунке *2.17* параллелограмм образован двумя пересекающимися полосами. Вы знаете, что полоса имеет постоянную ширину, другими словами — все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от второй прямой. Поэтому перпендикуляры EF, AM, BH, PO равны между собой, так же как равны между собой перпендикуляры BN и CL. И каждый из представленных перпендикуляров является высотой параллелограмма $ABCD$.

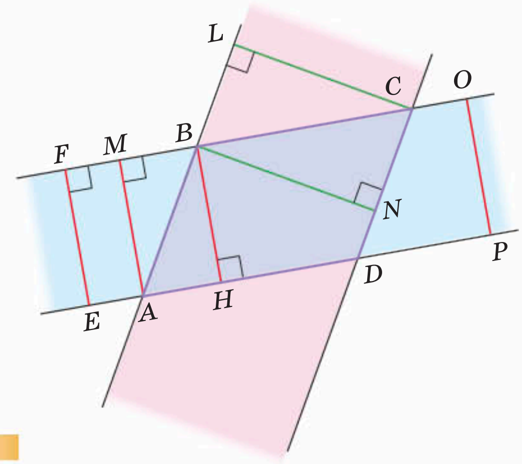


Рис. 2.17

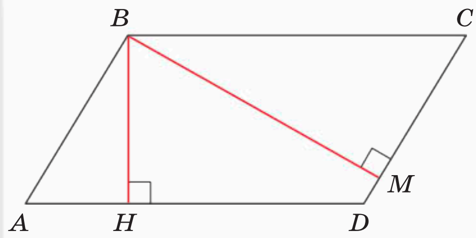


Рис. 2.18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противоположную сторону параллелограмма, называют **высотой параллелограмма**.

Говорят, что высоты EF, AM, BH, OP проведены к сторонам AD и BC, а высоты BN и CL — к сторонам AB и CD.

Из одной вершины параллелограмма можно провести две высоты (рис. *2.18*).

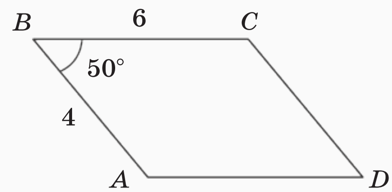
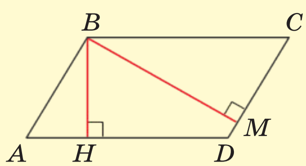


Рис. 2.19

Задача 3. Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины острого угла, равен тупому углу параллелограмма, а угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен острому углу параллелограмма.

Доказательство. На рисунке высоты BH и BM проведены из вершины тупого угла параллелограмма. Докажем, что углы HBM и BAD равны.



$BH \perp AD$ как высота параллелограмма. Так как $BM \perp DC$ как высота параллелограмма и $AB \parallel DC$ как противоположные стороны параллелограмма, то $BM \perp AB$. Таким образом, стороны угла HBM соответственно перпендикулярны сторонам угла BAD и оба угла HBM и BAD — острые, значит, они равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами.

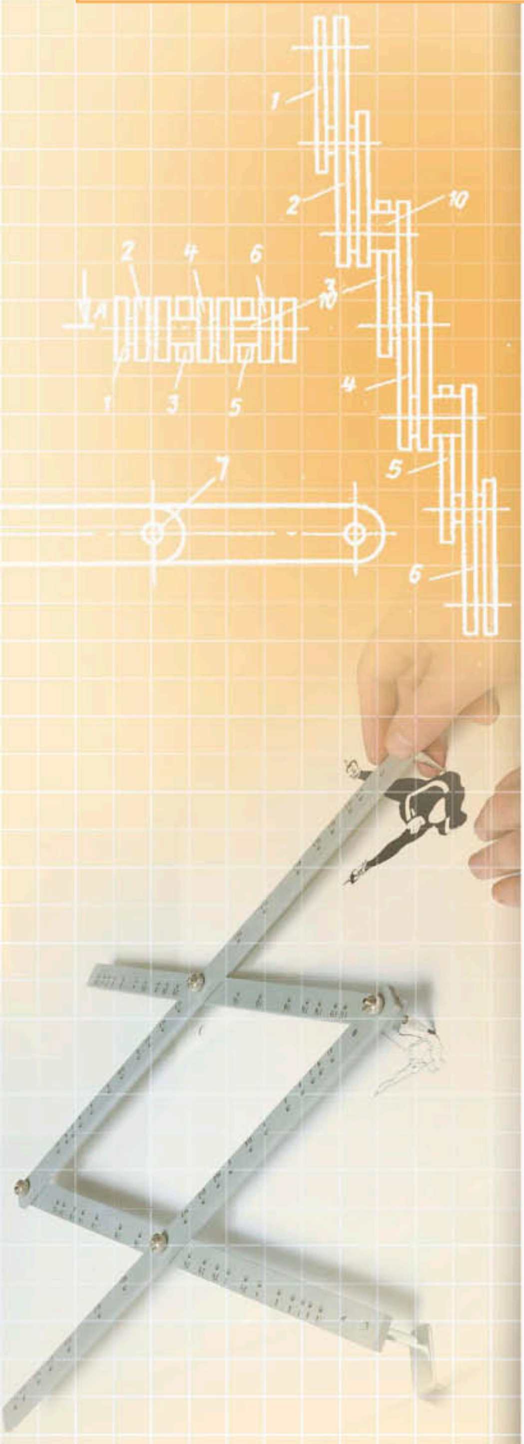
Случай, когда высоты проведены из вершины острого угла параллелограмма, рассматривается аналогично.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какой четырёхугольник называется параллелограммом?
- Перечислите свойства параллелограмма. Докажите их друг другу с соседом по парте.
- Четырёхугольник $MNPQ$ – параллелограмм. Назовите равные стороны; равные углы параллелограмма.
- Сумма двух углов параллелограмма равна 110°. Найдите углы параллелограмма.
- На рисунке *2.19* четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм. Какие элементы параллелограмма можно найти, используя данные рисунка?
- В параллелограмме $ABCD$:
  а) $\angle A > \angle B$. Сравните углы C и D;
  б) $AB + CD < AD + BC$. Сравните стороны AB и BC.

2.3 ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Признаки параллелограмма



Чтобы воспользоваться свойствами параллелограмма, во многих случаях нужно убедиться, что данный четырёхугольник является параллелограммом. По каким признакам это можно определить?

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА Определение параллелограмма содержит в себе как свойство, так и признак. Из определения следует признак параллелограмма: **если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.**

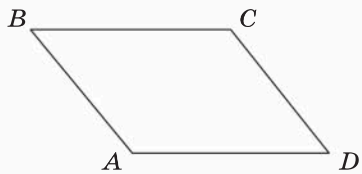


Рис. 2.20

Рассмотрим ещё три признака параллелограмма.

Теорема. Если две стороны четырёхугольника равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Для этого достаточно доказать, что $BC \parallel AD$.

Проведём в четырёхугольнике диагональ AC (рис. 2.21) и рассмотрим треугольники ABC и CDA.

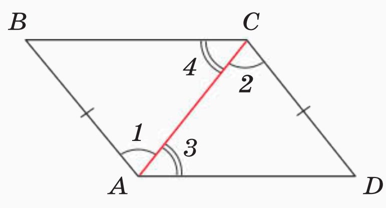


Рис. 2.21

В этих треугольниках AC — общая сторона, $AB = CD$ по условию и $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AB и CD и секущей AC. Следовательно, $\triangle ABC = \triangle CDA$ по первому признаку равенства треугольников.

Из равенства треугольников следует равенство углов 3 и 4. Но углы 3 и 4 — накрест лежащие углы, образованные прямыми BC и AD и секущей AC. Значит, по признаку параллельности прямых $BC \parallel AD$.

В четырёхугольнике $ABCD$ имеем: $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$, значит, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм по определению. ▼

ТЕОРЕМА. Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$, $AD = BC$. Докажем, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Для этого достаточно доказать, что, например, $BC \parallel AD$, и воспользоваться утверждением предыдущей теоремы.

Проведём в четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC (рис. *2.22*) и рассмотрим полученные треугольники ABC и CDA.

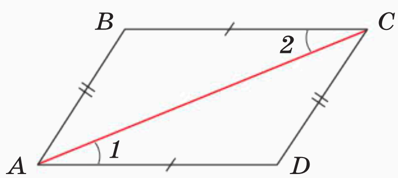


Рис. 2.22

Эти треугольники равны по третьему признаку: AC — общая сторона, $AB = CD$ и $BC = AD$ по условию.

Из равенства треугольников следует равенство углов *1* и *2*, которые являются накрест лежащими, образованными прямыми BC и AD и секущей AC. Значит, $BC \parallel AD$.

Так как $BC = AD$ и $BC \parallel AD$, то по предыдущей теореме четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. ▼

ТЕОРЕМА. Если диагонали четырёхугольника точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $AO = OC$, $BO = OD$ (рис. *2.23*). Докажем, что $ABCD$ — параллелограмм.

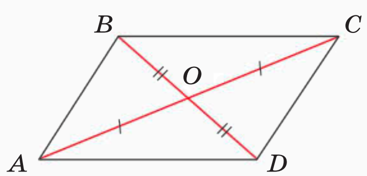


Рис. 2.23

Рассмотрим треугольники BOC и DOA. Эти треугольники равны по первому признаку равенства треугольников: $OC = AO$, $BO = OD$, $\angle BOC = \angle DOA$ как вертикальные.

Из равенства треугольников следует, что $AD = BC$ и $\angle OBC = \angle ODA$, а так как углы OBC и ODA — накрест лежащие, образованные прямыми AD и BC и секущей BD, то $AD \parallel BC$.

Таким образом, $AD = BC$ и $AD \parallel BC$. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм по признаку. ▼

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какой признак содержит определение параллелограмма?
- Сформулируйте другие признаки параллелограмма и докажите их друг другу с соседом по парте.
- Две стороны четырёхугольника равны, а две другие параллельны. Можно ли утверждать, что этот четырёхугольник — параллелограмм?
- Среди свойств и признаков параллелограмма укажите взаимно-обратные теоремы.

2.4 ПРЯМОУГОЛЬНИК

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какой параллелограмм называют прямоугольником
- Свойства и признаки прямоугольника

Хорошо вам знакомая фигура — прямоугольник — является частным случаем параллелограмма. Какие же свойства выделяют прямоугольник среди других параллелограммов?

ПРЯМОУГОЛЬНИК И ЕГО СВОЙСТВА

Определение. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется **прямоугольником.**

Так как прямоугольник (рис. *2.24*) — частный случай параллелограмма, то он обладает всеми свойствами параллелограмма.

Кроме того, прямоугольник имеет свои особые свойства. Одно из свойств содержится в определении: **все углы прямоугольника прямые.**

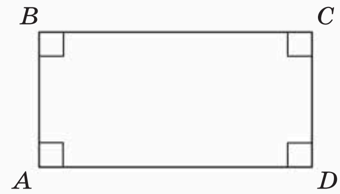


Рис. 2.24

Докажем ещё одно свойство прямоугольника.

Теорема. Диагонали прямоугольника равны.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — прямоугольник (рис. *2.25*). Докажем, что диагонали AC и BD равны.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ACD и DBA.

В этих треугольниках катет DA — общий, катеты AB и DC равны как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $\triangle ACD = \triangle DBA$ по двум катетам. Отсюда $AC = BD$. ▼

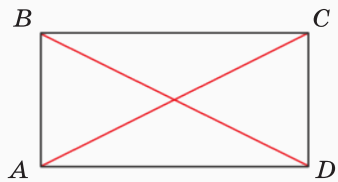


Рис. 2.25

Следствие. Точка пересечения диагоналей прямоугольника равноудалена от его вершин.

Докажите это следствие самостоятельно.

ПРЯМОУГОЛЬНИК И СИММЕТРИЯ Как и всякий параллелограмм, прямоугольник обладает центральной симметрией (центром симметрии является точка пересечения диагоналей). Кроме того, прямоугольник обладает и осевой симметрией. У прямоугольника две оси симметрии — прямые, проходящие через середины противоположных сторон (прямые MN и EF на рисунке *2.26*).

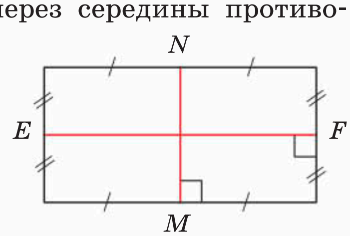


Рис. 2.26

ПРИЗНАКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

По каким признакам можно определить, что данный параллелограмм является прямоугольником? Один из при-

знаков следует из определения:
если у параллелограмма все углы прямые, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Докажем ещё два признака.

ТЕОРЕМА. Если у параллелограмма один угол прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, у которого $\angle A$ — прямой (рис. *2.27*).

Докажем, что параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

Рис. 2.27

Для этого надо доказать, что все углы параллелограмма $ABCD$ — прямые.

Так как противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle C = \angle A = 90°$.

$\angle A + \angle B = 180°$, как сумма односторонних углов, образованных параллельными прямыми AD и BC и секущей AB. Отсюда $\angle B = 180° - \angle A = 180° - 90° = 90°$. А $\angle D = \angle B = 90°$ как противоположные углы параллелограмма.

Таким образом $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, то есть все углы параллелограмма $ABCD$ — прямые, значит, $ABCD$ — прямоугольник. ▼

ТЕОРЕМА. Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Доказательство. Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ равны (рис. *2.28*). Докажем, что параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник.

В треугольниках ABD и DCA сторона AD — общая, $AC = BD$ по условию и $AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма. Следовательно, $\triangle ABD = \triangle DCA$ по трём сторонам. Отсюда $\angle BAD = \angle CDA$, а это односторонние углы, прилежащие к стороне параллелограмма, следовательно, $\angle A + \angle D = 180°$. Поэтому $2\angle A = 180°$, $\angle A = 90°$.

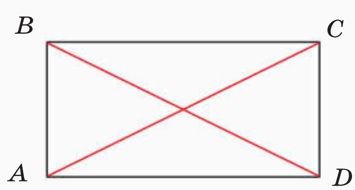


Рис. 2.28

Значит, по теореме, доказанной выше, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник. ▼

Докажите с соседом по парте ещё один признак прямоугольника.

ТЕОРЕМА. Четырёхугольник, у которого все углы прямые, — прямоугольник.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Дайте определение прямоугольника.
- Какими свойствами прямоугольник выделяется среди параллелограммов?
- Сформулируйте свойства прямоугольника и докажите их друг другу.
- Докажите, что четырёхугольник, у которого все углы прямые, — прямоугольник.

2.5 РОМБ

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Определение ромба
- Свойства ромба
- Признаки ромба

Слово «ромб» происходит от греческого ρομβος (ромбос), означающего «бубен». В древности музыкальный инструмент бубен был не круглым, как сейчас, а имел форму ромба.

Мы рассмотрели параллелограмм, у которого все углы равны. Теперь рассмотрим параллелограмм, у которого все стороны равны.

РОМБ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется **ромбом**.

Как и прямоугольник, ромб (рис. *2.29*) обладает всеми свойствами параллелограмма.

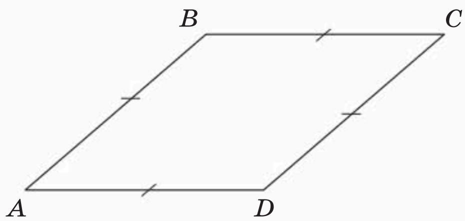


Рис. 2.29

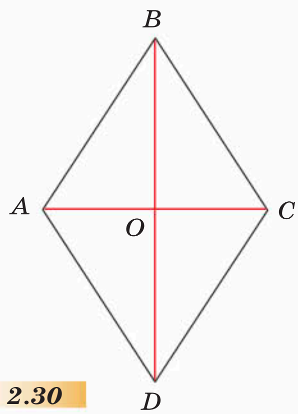


Рис. 2.30

Рассмотрим свойства, присущие только ромбу. Из определения следует, что **все стороны ромба равны**.

Среди параллелограммов ромбы выделяются ещё двумя характерными свойствами.

Теорема. Диагонали ромба: 1) взаимно перпендикулярны; 2) делят углы ромба пополам.

Доказательство. Пусть параллелограмм $ABCD$ — ромб, диагонали которого пересекаются в точке O (рис. *2.30*).

Докажем, что: 1) $AC \perp BD$, 2) $\angle ABD = \angle CBD$.

По определению ромба все его стороны равны, значит, треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC.

$AO = OC$ по свойству диагоналей параллелограмма.

Тогда BO — медиана треугольника ABC, а значит, и высота, и биссектриса. Следовательно,

1) $AC \perp BD$ и 2) $\angle ABD = \angle CBD$.

Аналогично доказывается, что $\angle ADB = \angle CDB$. То есть диагональ BD делит углы ромба пополам. Аналогично доказывается, что диагональ AC делит углы ромба $ABCD$ пополам. ▼

ПРИЗНАКИ РОМБА Какие же ещё признаки, кроме того, который содержится в определении, позволяют сделать вывод, что данный параллелограмм является ромбом?

Теорема. Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

Теорема. Если диагональ параллелограмма делит его угол пополам, то этот параллелограмм — ромб.

Докажите эти признаки самостоятельно.

Рассмотрим ещё один признак ромба.

Теорема. Если в четырёхугольнике все стороны равны, то этот четырёхугольник — ромб.

Доказательство. Если в четырёхугольнике все стороны равны, то противоположные стороны попарно равны, следовательно, по признаку такой четырёхугольник — параллелограмм.

А параллелограмм, у которого все стороны равны, — ромб. ▼

Покажем, как используются свойства ромба при решении следующей задачи.

Задача. Имея только геометрическую линейку (полосу), разделите данный угол пополам.

Решение. Пусть на рисунке *1* изображён данный угол A.

1. Приложим линейку к одной стороне угла и проведём вдоль другой стороны линейки прямую a (рис. *2*).
2. Повторим ту же операцию и с другой стороной угла. Получим прямую b (рис. *3*).
3. Обозначим буквой D точку пересечения прямых a и b и проведём луч AD, который и поделит данный угол A пополам (рис. *4*).

Докажите самостоятельно, что луч AD делит угол A пополам.

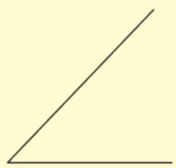


Рис. 1

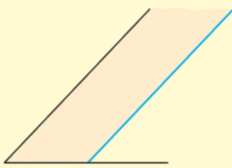


Рис. 2

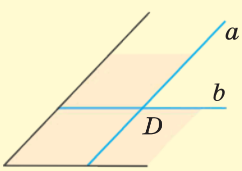


Рис. 3

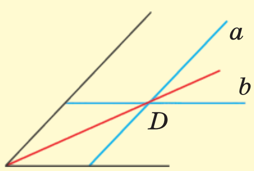


Рис. 4

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Дайте определение ромбу.
- Перечислите свойства ромба. Докажите их друг другу с соседом по парте.
- По каким признакам можно установить, что данный параллелограмм является ромбом? Докажите один из признаков.
- Может ли диагональ прямоугольника быть равной его стороне? А диагональ ромба?
- Как разбить ромб на 4 равных треугольника?

2.6 КВАДРАТ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какими свойствами обладает квадрат

Рассмотрим ещё один частный случай параллелограмма — квадрат.

КВАДРАТ И ЕГО СВОЙСТВА

Определение. Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется **квадратом**.

Из определения следует, что квадрат — **это ромб, у которого все углы прямые**. Таким образом, квадрат (рис. *2.31*) является частным случаем и прямоугольника, и ромба. Следовательно, квадрат обладает всеми свойствами и прямоугольника, и ромба. Значит, **диагонали квадрата равны, взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам** (рис. *2.32*).

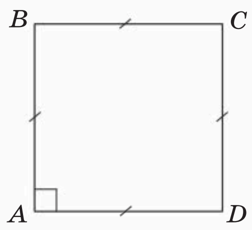


Рис. 2.31

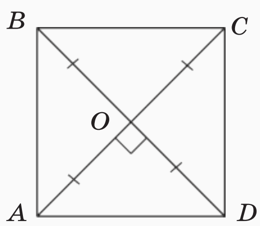


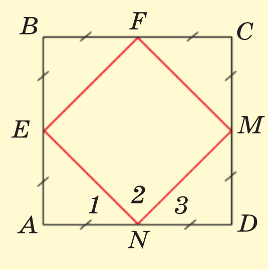
Рис. 2.32

Задача 1. Докажите, что если один из углов ромба — прямой, то этот ромб — квадрат.

Решение. Так как ромб является параллелограммом, в котором один угол прямой, то по признаку прямоугольника он является и прямоугольником, тогда по определению квадрата этот ромб — квадрат.

Задача 2. Точки E, F, M, N являются соответственно серединами сторон AB, BC, CD, AD квадрата $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $EFMN$ — квадрат.

Решение. Рассмотрим треугольники NAE, EBF, FCM и MDN. Они — прямоугольные, так как углы A, B, C и D являются углами квадрата $ABCD$, и равнобедренные, так как $AE = EB = BF = FC = CM = MD = DN = AN$ как половины сторон квадрата.
Тогда треугольники NAE, EBF, FCM, MDN равны по двум катетам. Отсюда $EF = FM = MN = NE$ как гипотенузы в равных треугольниках.
Следовательно, по признаку ромба четырёхугольник $EFMN$ — ромб.



Рассмотрим углы *1*, *2* и *3*. $\angle 1 = \angle 3 = 45^\circ$ как углы равнобедренных прямоугольных треугольников.
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.
Отсюда
$\angle 2 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 3) = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$.
Значит, ромб $EFMN$ является и прямоугольником. Тогда четырёхугольник $EFMN$ — квадрат.

СВЯЗЬ МЕЖДУ ОТДЕЛЬНЫМИ ВИДАМИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ Исходя из определений параллелограмма и его частных случаев, изобразим схематически с помощью диаграммы Эйлера — Венна связь между ними (рис. *2.33*).

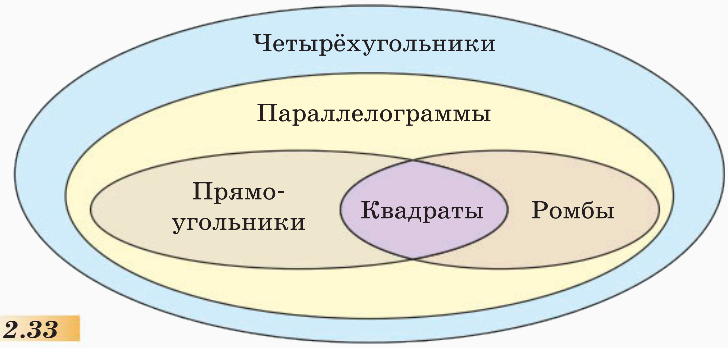


Рис. 2.33

Так, например, множество параллелограммов является подмножеством четырёхугольников.

Множество прямоугольников и множество ромбов являются подмножествами множества параллелограммов.

Множество квадратов является подмножеством и множества ромбов, и множества прямоугольников, и множества параллелограммов.

ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ И СИММЕТРИЯ Прямоугольник, ромб и квадрат, как и всякий параллелограмм, обладают центральной симметрией. Центром симметрии является точка пересечения диагоналей.

Кроме того, прямоугольник, ромб и квадрат обладают осевой симметрией. У прямоугольника две оси симметрии — прямые, проходящие через середины противоположных сторон (прямые MN и EF на рисунке *2.34*).

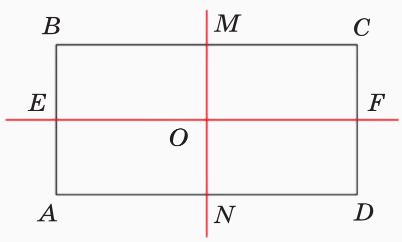


Рис. 2.34

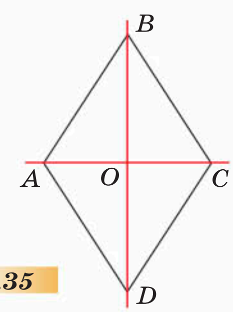


Рис. 2.35

У ромба тоже две оси симметрии — это прямые, содержащие его диагонали (рис. *2.35*).

У квадрата, одновременно являющегося и прямоугольником, и ромбом, четыре оси симметрии: прямые, содержащие его диагонали, и прямые, проходящие через середины противоположных сторон (рис. *2.36*).

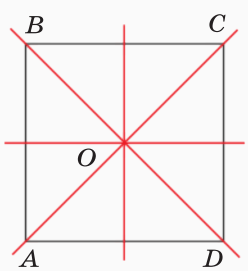


Рис. 2.36

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какой параллелограмм называют квадратом?
- Какими свойствами обладает квадрат?
- Какой ромб является квадратом?
- В каком случае прямоугольник является ромбом?
- Как перегибаниями листа бумаги получить ромб? квадрат?
- Верно ли утверждение:
  а) любой квадрат является параллелограммом;
  б) любой прямоугольник является квадратом;
  в) любой квадрат является ромбом;
  г) существует квадрат, который не является прямоугольником;
  д) существует ромб, который не является квадратом?

На основе диаграммы рисунка *2.33* составьте верные и неверные утверждения. Обсудите их с соседом по парте.

2.7 СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют средней линией треугольника
- Свойства средней линии треугольника

Свойства параллелограмма помогут нам установить одно важное свойство треугольника.

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЕЁ СВОЙСТВА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией треугольника.**

На рисунке *2.37* отрезки MN, NP и MP — средние линии треугольника ABC.

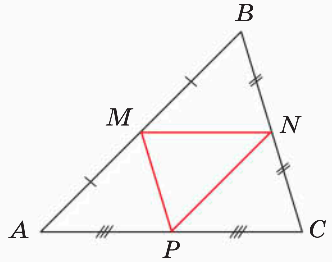


Рис. 2.37

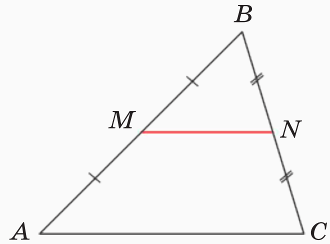


Рис. 2.38

ТЕОРЕМА. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

Доказательство. Пусть MN — средняя линия треугольника ABC (рис. *2.38*). Докажем, что $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

На продолжении отрезка MN за точку N отложим отрезок ND, равный отрезку MN. Соединим точки C и D (рис. *2.39*).

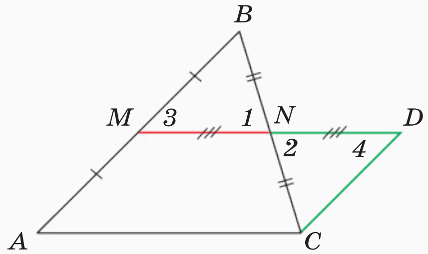


Рис. 2.39

Рассмотрим треугольники MBN и DCN. $MN = ND$, $\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные. Так как N — середина отрезка BC, то $BN = NC$. Следовательно, треугольники MBN и DCN равны по первому признаку равенства треугольников. Тогда $DC = MB$, $\angle 3 = \angle 4$.

Так как $AM = MB$ и $DC = MB$, то $AM = DC$.

Углы *3* и *4* — накрест лежащие, образованные прямыми AB и CD и секущей BC. Значит, $AB \parallel CD$, то есть $AM \parallel CD$.

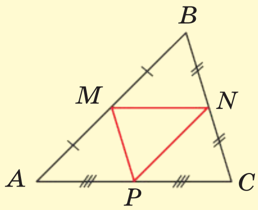
Рассмотрим четырёхугольник $AMDC$. В этом четырёхугольнике стороны AM и DC равны и параллельны, значит, по признаку $AMDC$ — параллелограмм. Следовательно, $MD \parallel AC$, то есть $MN \parallel AC$, а также $MD = AC$.

Так как $MN = ND$, то $MN = \frac{1}{2}MD$, а значит, $MN = \frac{1}{2}AC$. ▼

Задача 1. Докажите, что периметр треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника, равен половине периметра данного треугольника.

Решение. Пусть MN, NP и MP — средние линии треугольника ABC.

Докажем, что $P_{NMP} = \frac{1}{2} P_{ABC}$.



$$MN = \frac{1}{2} AC, \quad NP = \frac{1}{2} AB,$$

$$MP = \frac{1}{2} BC$$

как средние линии треугольника ABC.

$$P_{NMP} = MN + NP + MP = \frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BC =$$

$$= \frac{1}{2}(AC + AB + BC) = \frac{1}{2} P_{ABC}.$$

ТЕОРЕМА ВАРИНЬОНА. Любой четырёхугольник обладает важным свойством, которое впервые установил и доказал Пьер Вариньон. Его именем и названа соответствующая теорема.

Теорема. Середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ точки M, N, E и F — соответственно середины сторон AB, BC, CD и AD (рис. 2.40). Докажем, что четырёхугольник $MNEF$ — параллелограмм.

Проведём диагональ AC.

MN — средняя линия треугольника ABC. По свойству средней линии $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2} AC$.

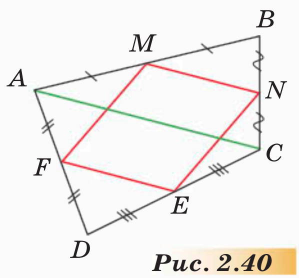


Рис. 2.40

EF — средняя линия треугольника ADC, по свойству средней линии $EF \parallel AC$ и $EF = \frac{1}{2} AC$.

Так как $MN \parallel AC$ и $EF \parallel AC$, то $MN \parallel EF$.

Так как $MN = \frac{1}{2} AC$ и $EF = \frac{1}{2} AC$, то $MN = EF$.

Таким образом, в четырёхугольнике $MNEF$ противоположные стороны равны и параллельны, а значит, по признаку четырёхугольник $MNEF$ — параллелограмм. ▼

Замечание. Параллелограмм $MNEF$ часто называют параллелограммом Вариньона.

Теорема Вариньона позволяет многие геометрические задачи решать более рационально и изящно, нежели без её применения.

Пьер Вариньон (1654–1722) — механик и математик, член Парижской Академии наук, друг Ньютона, Лейбница, Бернулли, внесший значительный вклад в развитие механики, математики.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют средней линией треугольника?
- Сформулируйте и докажите теорему о средней линии треугольника.
- Стороны треугольника равны 4 см, 5 см и 6 см. Найдите средние линии треугольника.
- Отрезки MN и NP – средние линии треугольника ABC. Является ли отрезок MP средней линией треугольника ABC? Почему?
- Может ли средняя линия треугольника быть перпендикулярной его стороне? двум сторонам?
- Могут ли в треугольнике средние линии быть равными 2 см, 4 см и 6 см?
- Можно ли найти периметр треугольника, зная длины всех его средних линий?

2.8 ТРАПЕЦИЯ

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Какой четырёхугольник называют трапецией
- Виды трапеции
- Свойства равнобедренной трапеции
- Свойства средней линии трапеции

Рассмотрим четырёхугольники, у которых только две стороны параллельны. Какими интересными свойствами они обладают?

ТРАПЕЦИЯ

Определение. Четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие нет, называется **трапецией**.

Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**, а две другие стороны — **боковыми сторонами**.

На рисунке *2.41* изображена трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Углы A и D называются углами трапеции при основании AD, а углы B и C — углами при основании BC.

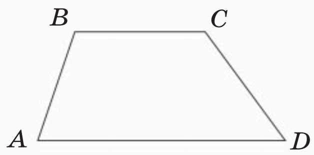


Рис. 2.41

Высотой трапеции называется перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований трапеции, на прямую, содержащую другое основание трапеции.

На рисунке *2.42* $BH = CF = KD = LM$ (длины этих отрезков равны расстоянию между параллельными прямыми BC и AD). Каждый из этих отрезков является высотой трапеции.

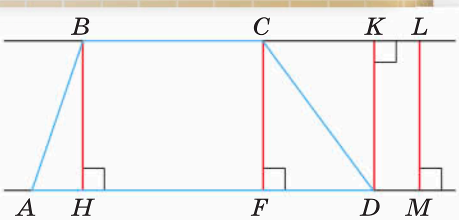


Рис. 2.42

Трапеция — выпуклый четырёхугольник.

Определение. Трапеция называется **прямоугольной**, если один из её углов прямой.

На рисунке *2.43* $ABCD$ — прямоугольная трапеция. У прямоугольной трапеции одна из боковых сторон является высотой.

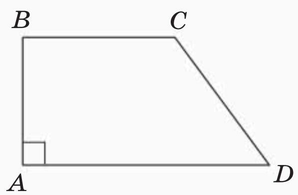


Рис. 2.43

Определение. Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны (рис. *2.44*).

Иногда равнобедренную трапецию называют **равнобокой**.

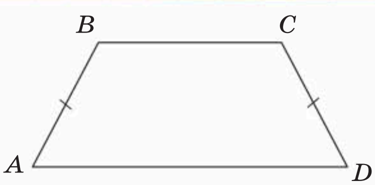


Рис. 2.44

Рассмотрим свойства равнобедренной трапеции.

Теорема. **В равнобедренной трапеции равны: 1) углы при каждом основании; 2) диагонали.**

Доказательство. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$, у которой $AB = CD$.

Докажем сначала, что $\angle A = \angle D$ и $\angle B = \angle C$.

Проведём высоты трапеции BH и CM (рис. *2.45*).

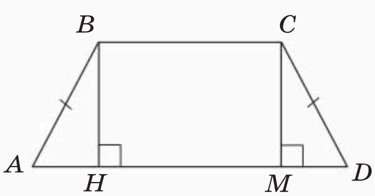


Рис. 2.45

$AB = CD$ по условию, $BH = CM$ как высоты трапеции, тогда $\triangle ABH = \triangle DCM$, по гипотенузе и катету. Отсюда следует, что $\angle A = \angle D$.

В трапеции $ABCD$ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ как сумма односторонних углов, образованных параллельными прямыми AD и BC и секущей AB.

Значит, $\angle B = 180^\circ - \angle A$.

Аналогично можно сделать вывод, что

$$\angle C = 180^\circ - \angle D.$$

Следовательно, $\angle B = \angle C$.

Докажем теперь, что в равнобедренной трапеции равны диагонали.

Рассмотрим рисунок *2.46*. В треугольниках ABD и DCA сторона AD общая, $AB = CD$ по условию, $\angle BAD = \angle ADC$ по доказанному выше. Значит $\triangle ABD = \triangle CAD$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда $AC = BD$. ▼

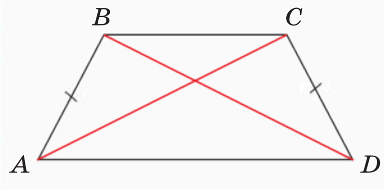


Рис. 2.46

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

Определение. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется **средней линией трапеции.**

На рисунке *2.47* MN — средняя линия трапеции $ABCD$.

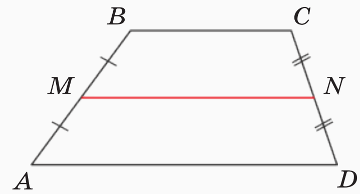


Рис. 2.47

Докажем теорему о средней линии трапеции.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Доказательство. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD. Докажем, что $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Проведём прямую BN и обозначим точку пересечения прямых BN и AD буквой O (рис. *2.48*).

$CN = DN$, так как N — середина отрезка CD.

$\angle 1 = \angle 2$ как вертикальные углы, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми BC и AD и секущей CD.

Тогда $\triangle NBC = \triangle NOD$ по второму признаку равенства треугольников.

Отсюда следует, что $DO = BC$ и $BN = NO$.

Тогда N — середина BO. MN — средняя линия треугольника ABO. Тогда по свойству средней линии треугольника $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}AO$.

Так как $AO = AD + DO$, а $DO = BC$, то $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$. ▼

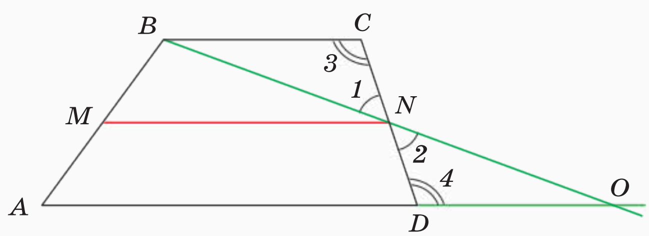


Рис. 2.48

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

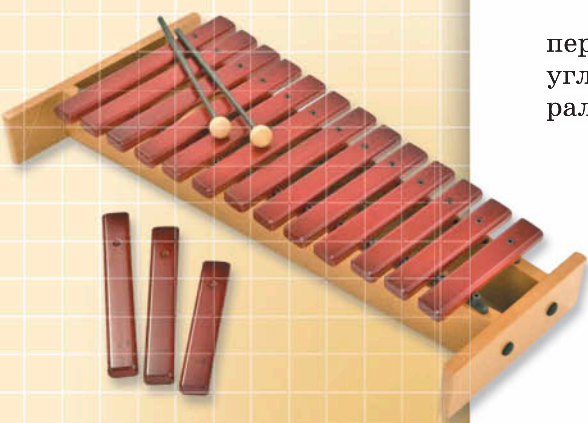
- Какой четырёхугольник называется трапецией?
- Какие стороны называются основаниями трапеции?
- Могут ли углы, прилежащие к основанию трапеции, быть один – острым, другой – тупым?
- Что называют высотой трапеции?
- Какую трапецию называют прямоугольной?
- Какую трапецию называют равнобедренной? Какими свойствами обладает равнобедренная трапеция? Докажите их друг другу.
- Может ли равнобедренная трапеция быть прямоугольной?
- Что называют средней линией трапеции? Какими свойствами обладает средняя линия? Докажите их друг другу.
- Докажите, что средняя линия трапеции проходит через середину диагонали трапеции.

2.9

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Теорему Фалеса
- Как разделить отрезок на n равных частей



Свойства параллелограмма помогут нам в доказательстве одной теоремы, полезной как для решения многих задач, так и в практической жизни.

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

ТЕОРЕМА. **Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.**

Доказательство. Точки A_1, A_2, A_3 и т. д. — точки пересечения параллельных прямых с одной из сторон угла A, а точки B_1, B_2, B_3... — точки пересечения параллельных прямых с другой стороной угла A.

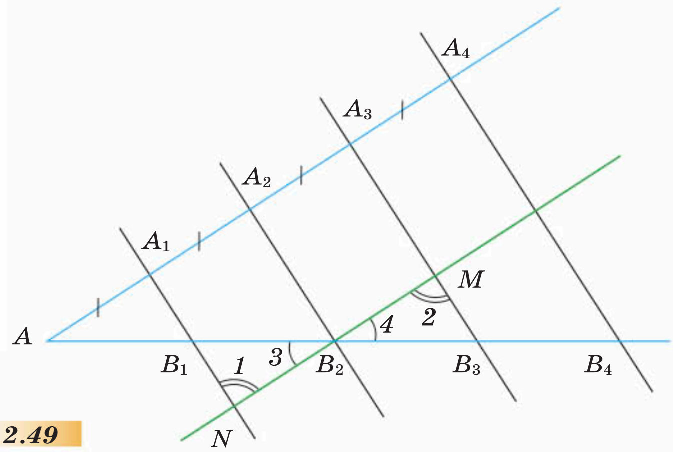


Рис. 2.49

Докажем, что если $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

Через точку B_2 проведём прямую MN, параллельную прямой A_1A_2 (рис. *2.49*).

Тогда четырёхугольники $A_1A_2B_2N$ и $A_2A_3MB_2$ параллелограммы по определению, значит, $A_1A_2 = NB_2$ и $A_2A_3 = B_2M$, а так как $A_1A_2 = A_2A_3$, то и $NB_2 = B_2M$.

Рассмотрим треугольники B_1B_2N и B_3B_2M. Они равны по второму признаку: у них $NB_2 = B_2M$ по доказанному ранее, $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие, образованные параллельными прямыми A_1B_1 и A_3B_3 и секущей MN, $\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные. Из равенства треугольников следует, что $B_1B_2 = B_2B_3$. ▼

Замечание. На самом деле вместо сторон угла в условии теоремы могут быть любые две прямые, тогда теорему Фалеса можно сформулировать таким образом:

Параллельные прямые, пересекающие две данные прямые и отсекающие на одной прямой равные отрезки, отсекают равные отрезки и на другой прямой.

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА НА n РАВНЫХ ЧАСТЕЙ

С помощью циркуля и линейки мы умеем делить данный отрезок на 2 части, 4 части, 8 частей и т. д. А как с помощью циркуля и линейки разделить отрезок, например, на 3 части, на 7 частей? Это можно сделать, используя теорему Фалеса.

Разделим сначала отрезок AB на 3 равные части.

1. Проведём из точки A любой луч AM, не лежащий на прямой AB.

2. Отложим на AM три равных отрезка: AA_1, A_1A_2, A_2A_3 (рис. *2.50, а*).

3. Соединим точки A_3 и B.

4. Через точки A_1 и A_2 проведём прямые, параллельные A_3B (рис. *2.50, б*).

Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1 и B_2, которые по теореме Фалеса делят отрезок на три равные части.

Аналогично можно разделить отрезок на любое число равных частей.

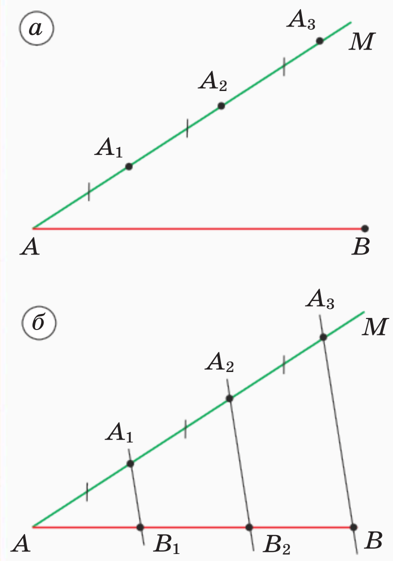


Рис. 2.50

Задача. Точки E и M делят боковую сторону AB трапеции $ABCD$ на 3 равные части. Через точки E и M проведены прямые, параллельные основанию трапеции AD. Чему равны отрезки этих прямых, заключённые между боковыми сторонами, если основания трапеции равны 7 см и 19 см?

Решение.

Пусть $AD = 19$ см, $BC = 7$ см.

По условию $AE = EM = MB$. Тогда прямые EE_1 и MM_1, параллельные основаниям трапеции, отсекают, согласно теореме Фалеса, на стороне CD также равные отрезки, то есть $DE_1 = E_1M_1 = M_1C$.

Тогда по определению прямая EE_1 — средняя линия трапеции AMM_1D и

$$EE_1 = \frac{MM_1 + AD}{2}.$$

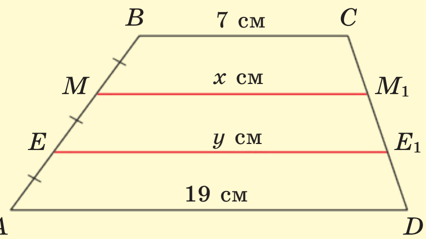
MM_1 — средняя линия трапеция $EBCE_1$, отсюда по свойству средней линии трапеции:

$$MM_1 = \frac{BC + EE_1}{2}.$$

Пусть $MM_1 = x$, $EE_1 = y$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \dfrac{7+y}{2}; \\ y = \dfrac{x+19}{2}; \end{cases}$$

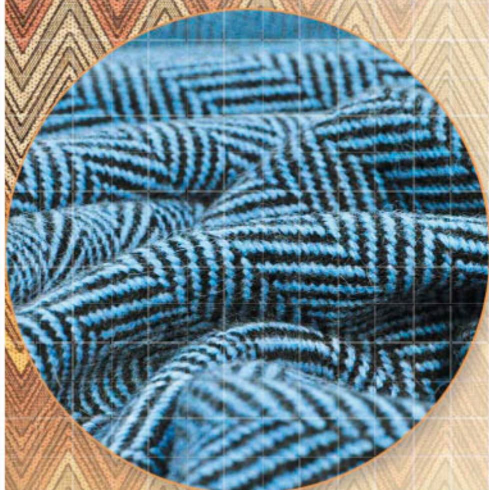
$$\begin{cases} 2x = 7 + y; \\ 2y = x + 19. \end{cases}$$



Решив систему, получим, что $x = 11$, $y = 15$.

Итак, $MM_1 = 11$ см, $EE_1 = 15$ см.

Ответ: 11 см и 15 см.



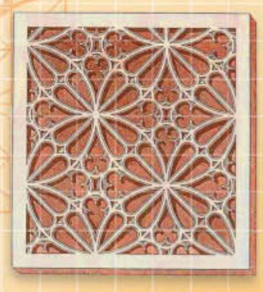
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите соседу по парте теорему Фалеса.
- Дан отрезок AB. Как разделить его на 9 равных частей? Составьте алгоритм и выполните построение.

2.10 ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В какой четырёхугольник можно вписать окружность
- Около какого четырёхугольника можно описать окружность



Возможно ли вписать окружность в четырёхугольник или описать окружность около него? И если возможно, то для любого четырёхугольника или же четырёхугольник должен обладать какими-то определёнными свойствами?

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ, ВПИСАННЫЕ В ОКРУЖНОСТЬ

Определение. Окружность называется **описанной около четырёхугольника**, если она проходит через все его вершины. Четырёхугольник в этом случае называется **вписанным в окружность.**

На рисунке *2.51* четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность.

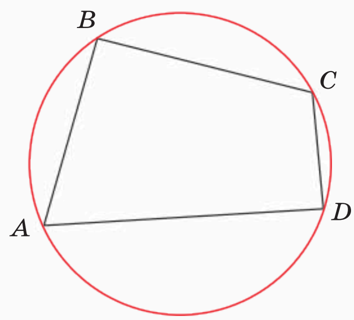


Рис. 2.51

Мы знаем, что около любого треугольника можно описать окружность. А вот около четырёхугольника не всегда можно описать окружность. Например, нельзя описать окружность около параллелограмма $ABCD$ на рисунке *2.52*.

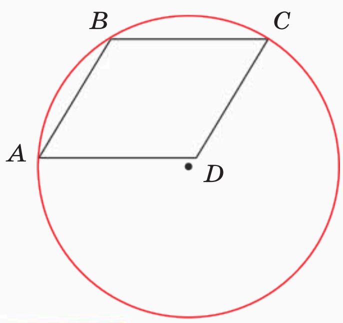


Рис. 2.52

Следующая теорема показывает, каким свойством должен обладать вписанный в окружность четырёхугольник.

Теорема. В любом вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°.

Доказательство. Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. *2.53*).

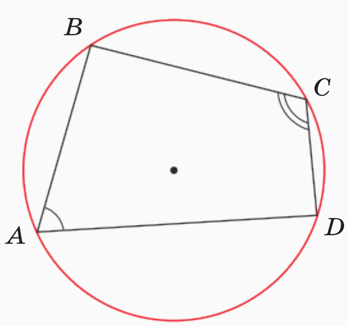


Рис. 2.53

По теореме о вписанном угле:

$$\angle A = \frac{1}{2}\smile BCD, \text{ а } \angle C = \frac{1}{2}\smile DAB, \text{ поэтому}$$

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\smile BCD + \frac{1}{2}\smile DAB =$$

$$= \frac{1}{2}(\smile BCD + \smile DAB) = \frac{1}{2}\cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Аналогично доказывается, что

$$\angle B + \angle C = 180^\circ. \ \blacktriangledown$$

Справедлива и обратная теорема — **признак вписанного четырёхугольника.**

Теорема. Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов A и C равна 180°. Докажем, что около него можно описать окружность.

Предположим, что около этого четырёхугольника нельзя описать окружность.

Так как окружность можно описать около любого треугольника, опишем окружность около треугольника ABD. Тогда, по предположению, точка C не принадлежит этой окружности. Поэтому возможны два случая взаимного расположения точки C и окружности.

1. Точка C лежит вне описанной окружности.

Обозначим буквой E точку пересечения стороны BC четырёхугольника и окружности (рис. 2.54). Тогда четырёхугольник $ABED$ будет вписанным в окружность, и по свойству вписанного четырёхугольника $\angle A + \angle BED = 180^\circ$. По условию $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Отсюда $\angle BED = \angle C$, что невозможно, так как по свойству внешнего угла треугольника $\angle BED = \angle C + \angle EDC$. Значит, точка C не может лежать вне окружности.

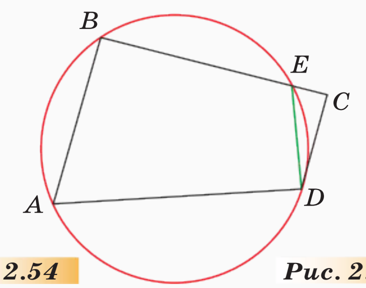


Рис. 2.54

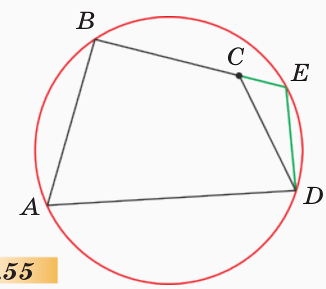


Рис. 2.55

2. Точка C лежит внутри описанной около треугольника ABD окружности (рис. 2.55).

Рассуждая аналогично, придём к выводу, что точка C не может лежать внутри описанной около треугольника ABD окружности.

Таким образом, предположив, что вершина C четырёхугольника $ABCD$ не принадлежит окружности, мы получили противоречие. Значит, все вершины четырёхугольника $ABCD$ принадлежат окружности, то есть около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность. ▼

Следствие 1. Около любого прямоугольника можно описать окружность (рис. 2.56).

Следствие 2. Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность (рис. 2.57).

Докажите эти следствия самостоятельно.

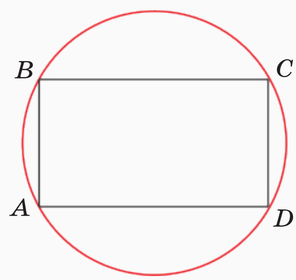


Рис. 2.56

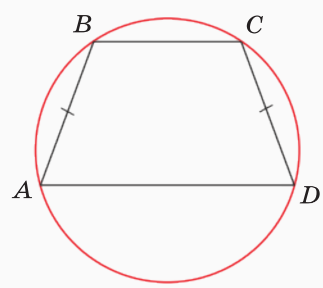


Рис. 2.57

ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Определение. Окружность называется **вписанной в четырёхугольник**, если она касается всех его сторон. Четырёхугольник в этом случае называется **описанным около окружности.**

В отличие от треугольника, в четырёхугольник не всегда можно вписать окружность. Так, нельзя вписать окружность в прямоугольник $ABCD$ на рисунке *2.58*.

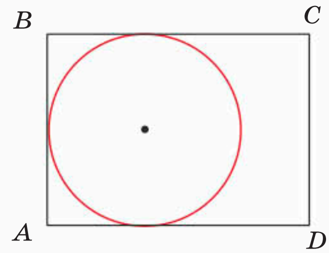


Рис. 2.58

Следующая теорема показывает, каким свойством обладает описанный четырёхугольник.

Теорема. В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.

Доказательство. Пусть четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности (рис. *2.59*).

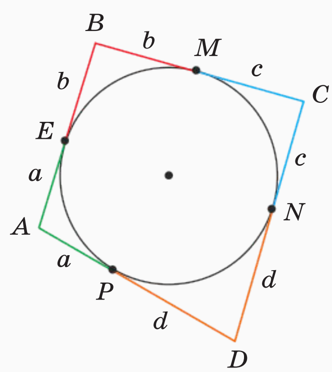


Рис. 2.59

Точки E, M, N, P — точки касания окружности со сторонами четырёхугольника $ABCD$. Докажем, что $AB + CD = AD + BC$.

Вы знаете, что отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки, равны. Значит,

$$AE = AP,\; BE = BM,\; CM = CN \text{ и } DN = DP.$$

Пусть $AE = AP = a$, $BE = BM = b$, $CM = CN = c$, $DN = DP = d$.

Тогда

$$AB + CD = a + b + c + d$$

и

$$AD + BC = a + d + b + c,$$

следовательно, $AB + CD = AD + BC$. ▼

Справедлива и обратная теорема — **признак описанного около окружности четырёхугольника**.

Теорема. Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

Доказательство. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ выполняется равенство: $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в него можно вписать окружность.

Обозначим точку пересечения биссектрис углов A и B четырёхугольника $ABCD$ буквой O (рис. *2.60*).

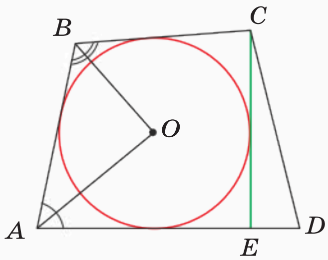


Рис. 2.60

Тогда точка O равноудалена от сторон AB, BC и AD четырёхугольника. Следовательно, существует окружность с центром O, касающаяся этих трёх сторон четырёхугольника $ABCD$.

Предположим, что эта окружность не касается стороны CD. Тогда возможны два случая.

1. Сторона CD не имеет общих точек с окружностью.

Проведём через точку C касательную к окружности, которая пересекает сторону AD в точке E.

Тогда по свойству описанного четырёхугольника $ABCE$:

$$AB + CE = BC + AE \qquad (1)$$

По условию: $AB + CD = BC + AD \qquad (2)$

Вычитая из второго равенства первое, получим:

$$AB + CD - AB - CE = BC + AD - BC - AE;$$
$$CD - CE = AD - AE;$$
$$CD - CE = DE;$$
$$CD = DE + CE.$$

А это противоречит неравенству треугольника CDE.

Таким образом, наше предположение неверно и сторона CD имеет общие точки с рассматриваемой окружностью.

2. Рассуждая аналогично, можно доказать, что сторона CD не может иметь 2 общие точки с окружностью.

Следовательно, окружность касается стороны CD, то есть четырёхугольник $ABCD$ — вписанный. ▼

Следствие. В любой ромб можно вписать окружность.

Докажите это самостоятельно.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какую окружность называют описанной около четырёхугольника?
- В каком случае говорят, что четырёхугольник вписан в окружность?
- Каким свойством обладают углы вписанного в окружность четырёхугольника?
- При каком условии около четырёхугольника можно описать окружность?
- Какую окружность называют вписанной в четырёхугольник?
- В каком случае говорят, что четырёхугольник описан около окружности?
- Каким свойством обладает описанный около окружности четырёхугольник?
- При каком условии можно вписать окружность в четырёхугольник?
- Докажите соседу по парте, что около любого прямоугольника можно описать окружность. Какая точка является центром этой окружности?
- Докажите соседу по парте, что около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность.
- Можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если:
  а) $\angle A = 90°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 90°$, $\angle D = 100°$;
  б) $\angle A = 80°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 90°$, $\angle D = 100°$.
- Докажите соседу по парте, что в любой ромб можно вписать окружность. Где находится центр этой окружности?

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 2.1

Т **1** Начертите выпуклый четырёхугольник $ABCD$.
а) Запишите ещё два обозначения этого четырёхугольника.
б) Сколько соседних вершин имеет вершина четырёхугольника? Назовите вершины, соседние с вершиной C, с вершиной D.
в) Сколько противолежащих вершин имеет вершина четырёхугольника? Какие вершины четырёхугольника $ABCD$ являются противолежащими?
г) Назовите противолежащие стороны четырёхугольника; смежные стороны четырёхугольника.

Т **2** Вершинами четырёхугольника являются точки M, N, O, P.
а) Известно, что MN и PN — стороны четырёхугольника. Назовите его диагонали.
б) Известно, что ON — диагональ четырёхугольника. Назовите вершины, соседние с вершиной O.
в) Данный четырёхугольник можно назвать $OPNM$. Можно ли его назвать $MNOP$?

К Т **3** а) Начертите отрезок AB. Начертите четырёхугольник так, чтобы отрезок AB был: 1) стороной четырёхугольника; 2) диагональю четырёхугольника.
б) Проведите параллельные прямые. На одной из них обозначьте точки A и B, а на другой — C и D так, чтобы при последовательном соединении этих точек образовался выпуклый четырёхугольник $ABCD$.

К **4** Определите, может ли четырёхугольник $ABCD$ быть выпуклым, если:
а) прямая BC пересекает прямую AD;
б) точки B и C лежат по разные стороны от прямой AD;
в) прямая AB пересекает отрезок CD.

К **5** Существует ли четырёхугольник $ABCD$, в котором:
а) $AB = 15$ см, $BC = 18$ см, $AC = 33$ см; б) $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $AC = 5$ см?

6 а) Периметр четырёхугольника равен 100 см. Найдите стороны четырёхугольника, если известно, что одна из сторон в 2 раза меньше второй, на 10 см меньше третьей и на 20 см меньше четвёртой.
б) Найдите периметр четырёхугольника, если известно, что его меньшая сторона равна 8 см, две другие на 3 см больше, а четвёртая в 2 раза больше меньшей стороны.

7 а) Периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 26 см. Периметр треугольника ABD равен 24 см, а периметр треугольника BCD равен 20 см. Найдите длину диагонали BD.
б) В четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC, равная 10 см. Периметр треугольника ABC равен 35 см, периметр треугольника ADC равен 24 см. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.

Т **8** **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**
1) Сколько острых углов может быть в выпуклом четырёхугольнике? А тупых?
2) Докажите, что если три угла выпуклого четырёхугольника являются тупыми, то четвёртый угол — острый.

3) Докажите, что если в четырёхугольнике один из углов острый, то обязательно в этом четырёхугольнике есть и тупой угол.
4) Один из углов выпуклого четырёхугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что такой угол — тупой.
5) Может ли в выпуклом четырёхугольнике быть: а) один из углов меньше суммы остальных; б) один из углов больше суммы остальных?
6) Докажите, что две стороны четырёхугольника перпендикулярны, если сумма трёх его углов равна $270°$.

К 9 а) Известно, что два угла четырёхугольника равны, а два других имеют градусные меры $70°$ и $110°$. Чему равен наибольший угол четырёхугольника?
б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если $\angle B + \angle D = 120°$, а $\angle A$ и $\angle C$, $\angle B$ и $\angle D$ попарно равны.

10 а) Найдите углы четырёхугольника, если известно, что один из них на $30°$ меньше второго, на $60°$ меньше третьего и в 3 раза меньше четвёртого.
б) Найдите углы четырёхугольника, если известно, что их градусные меры относятся как $3 : 4 : 5 : 6$.

11 а) В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC образует равные углы с равными сторонами AB и AD. Докажите, что $BC = CD$.
б) В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ BD образует равные углы со сторонами AD и DC. Чему равен периметр четырёхугольника $ABCD$, если $AB = 7$? $BC = 4$?

К Т 12 Докажите, что сумма двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника меньше суммы длин его диагоналей.

Т 13 Постройте четырёхугольник по его сторонам и одному из углов.

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке *1*: $\angle A = \angle D$. Можно ли утверждать, что отрезки AB и DE параллельны?
2. а) На рисунке *2*: $\triangle ABC = \triangle CDA$. Докажите, что $AD \parallel BC$. Найдите BC, если $AD = 12$. Найдите угол D, если $\angle B = 117°$. б) На рисунке *2*: $AB = DC$, $\angle BAC = \angle DCA$. Докажите, что $BC \parallel AD$.
3. На рисунке *3*: $AD = CM$, $AB = EM$, $BC = DE$. Докажите, что: а) $AB \parallel EM$; б) $BC \parallel DE$.

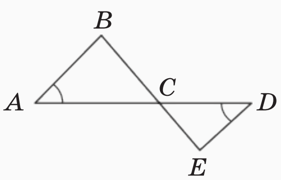


Рис. 1

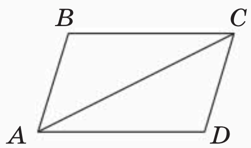


Рис. 2

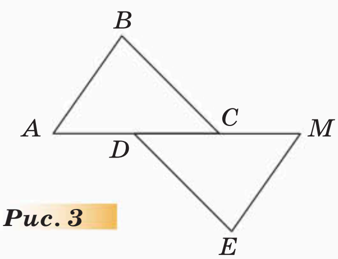


Рис. 3

П. 2.2

Т 14 Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Назовите: а) пары параллельных сторон; б) пары равных сторон; в) пары равных углов.

Т 15 а) Три параллельные прямые пересекаются с двумя другими параллельными прямыми. Сколько получилось параллелограммов?
б) Сколько получится параллелограммов, если три параллельные прямые пересечь тремя параллельными прямыми?

Т **16** На рисунке *4* диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Укажите: а) отрезок, являющийся медианой треугольника ABD; б) треугольник, медианой которого является отрезок OD.

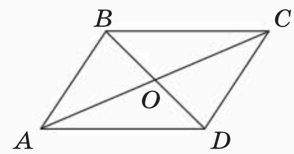


Рис. 4

Т **17** Перечертите параллелограмм $ABCD$, изображённый на рисунке *5*, в тетрадь. Проведите высоты параллелограмма к сторонам параллелограмма: а) из точки C; б) из вершины B.

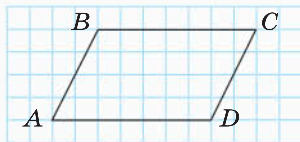


Рис. 5

К Т **18** Начертите треугольник ABC.
а) Через вершины A и C проведите прямые, параллельные сторонам BC и AB соответственно. Точку пересечения этих прямых обозначьте буквой D. Объясните, почему четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом.
б) Измерьте стороны AB и AD параллелограмма и вычислите его периметр. Каким свойством параллелограмма вы воспользовались?

К Т **19** Начертите разносторонний треугольник и через каждую вершину проведите прямую, параллельную противолежащей стороне. Сколько параллелограммов изображено на рисунке?

К Т **20** а) Даны два равных разносторонних треугольника. Сколько различных параллелограммов можно образовать из этих треугольников?
б) Сколько различных параллелограммов можно образовать: 1) из двух равных равнобедренных треугольников; 2) из двух равных равносторонних треугольников?

21 Вычислите все углы параллелограмма, если один из его углов:
а) $45°$; б) $110°$; в) на $30°$ больше другого; г) в 2 раза меньше другого.

22 Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. $AB = 2$, $AO = 3$, $BO = 4$. а) Найдите OC и OD. б) Найдите периметр треугольника COD.

Т **23** а) Сумма трёх сторон параллелограмма равна 16 см, в этом же параллелограмме сумма трёх сторон равна 20 см. Найдите периметр параллелограмма.
б) Одна из сторон параллелограмма на 7 см меньше другой. Сумма смежных сторон параллелограмма равна 25 см. Чему равны стороны параллелограмма?

24 Периметр параллелограмма равен 40 см. Чему равны стороны параллелограмма, если: а) одна из сторон в три раза больше смежной с ней; б) разность смежных сторон равна 6 см; в) параллелограмм составлен из двух равнобедренных треугольников с периметром 34 см?

25 а) Точка пересечения диагоналей параллелограмма удалена от его вершин на 3 см и 5 см. Найдите длины диагоналей параллелограмма.
б) В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. $\angle DAC = 47°$, $\angle CAB = 11°$. Найдите бо́льший угол параллелограмма.

26 а) Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое меньше стороны AB. Точка M — середина стороны AB. Докажите, что CM — биссектриса угла BCD.
б) Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, принадлежащей стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

27 а) Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M и продолжение стороны CD в точке P. Известно, что $CP = 3$, $BM = 4$. Найдите стороны параллелограмма.

б) Биссектриса одного из углов параллелограмма делит его сторону в отношении 2 : 1. Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если меньшая сторона равна 4,8 см.

Т **28** а) На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки E и P так, что $EC = AP$. Докажите, что $\angle BEA = \angle DPC$.
б) На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки F и M так, что $\angle BAF = \angle DCM$. Докажите, что $AF = CM$.

29 а) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки K и L так, что $AK = CL$. Докажите, что $DK = BL$.
б) На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки L и K так, что $\angle ABL = \angle CDK$. Докажите, что $BK = DL$.

Т **30** а) Диагонали параллелограмма $ABCD$ равны 9 см и 12 см и пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOB, если сторона CD равна 7,5 см.
б) В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. $AC + BD = 18$ см, $P_{BOC} = 16$ см. Чему равна сторона BC?

31 а) На сторонах BC и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены соответственно точки M и N так, что $CM = AN$. Докажите, что диагональ AC делит отрезок MN пополам.
б) Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке M, а сторону DC в точке N. Докажите, что $BM = DN$.

32 а) Докажите, что сумма длин диагоналей параллелограмма больше его полупериметра.
б) Докажите, что сумма длин диагоналей параллелограмма меньше его периметра.

К Т **33** а) Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих одной стороне, перпендикулярны.
б) Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма с неравными смежными сторонами параллельны.

Т **34** а) Докажите, что угол между высотами параллелограмма, проведёнными из одной вершины, равен углу параллелограмма при соседней вершине.
б) Из одной вершины параллелограмма проведены высоты длиной 5 см и 7 см, угол между ними равен 30°. Найдите периметр параллелограмма.

Т **35** а) Найдите углы параллелограмма, если его диагональ перпендикулярна одной из сторон и равна половине другой стороны.
б) Найдите углы параллелограмма, который делится диагональю на два равнобедренных прямоугольных треугольника (рассмотрите два случая).

К Т **36** В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов A и D делят сторону BC на отрезки длиной 3 см, 2 см и 3 см. Найдите периметр параллелограмма. Сколько решений имеет задача?

Т **37** В параллелограмме $ABCD$ точки M и N являются соответственно серединами сторон BC и AD. Докажите, что отрезки AM и CN делят диагональ BD на три равные части.

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке 6: $OA = OB$, $OB = OC$, $\angle BDC = 36^\circ$, $\angle CAD = 54^\circ$.
а) Докажите, что $\triangle AOB = \triangle DOC$. б) Найдите $\angle BAO$.

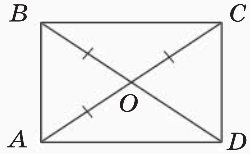


Рис. 6

2. а) Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведённые к боковым сторонам, равны.
б) Используя данные рисунка *7*, докажите, что биссектрисы DF и BE треугольников ACD и ABC равны.

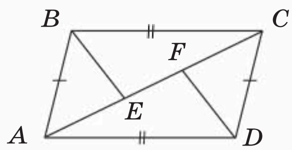


Рис. 7

П. 2.3

Т 38 а) Диагонали четырёхугольника $MNPK$ пересекаются в точке O, причём $MO = OP$; $NO = OK$. Назовите параллельные стороны четырёхугольника $MNPK$ и объясните, почему они параллельны.
б) В четырёхугольнике $BCDE$: $BC = DE$, $BC \parallel DE$. Назовите равные углы и объясните, почему они равны.
в) В четырёхугольнике $ABCD$: $AB = CD$; $BC = AD$. Укажите углы, сумма которых равна 180°, и поясните, на основании чего это можно утверждать.

Т 39 а) Проведите две параллельные прямые. На одной из них отложите отрезок AD, а на другой — равный ему отрезок BC так, чтобы точки A и B лежали по одну сторону от прямой CD. Соедините точки A и B, C и D. Объясните, почему четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
б) Проведите две пересекающиеся прямые и обозначьте точку их пересечения буквой O. На одной прямой отложите отрезки OA и OC, равные 3 см, а на другой прямой — отрезки OB и OD, равные 2 см. Соедините точки A, B, C и D. Почему получившийся четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом?

40 Объясните, откуда следует, что четырёхугольник $ABCD$ на рисунке *8* — параллелограмм.

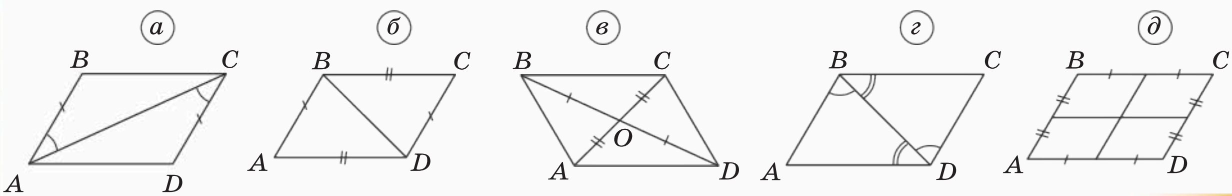
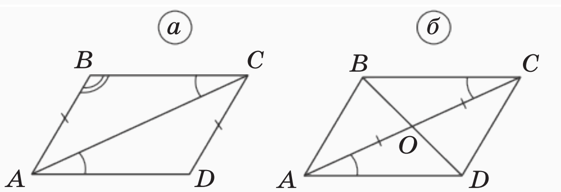


Рис. 8

Рис. 9



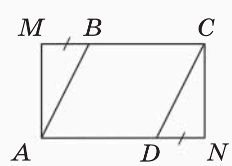


Рис. 10

Т 41 По данным рисунка *9* докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

42 а) На рисунке *10*: $AMCN$ — параллелограмм, $MB = DN$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
б) На рисунке *11*: $MBND$ — параллелограмм, $AM = NC$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

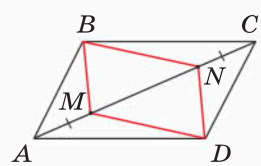


Рис. 11

43 а) В четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ BD, $AD = BC$, $\angle BAD = 120°$, $\angle ABD = 40°$, $\angle CBD = 20°$. Докажите, что $AB \parallel CD$.
б) В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $BO = OD$, $AD = BC$, $\angle DBC = \angle ADB$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

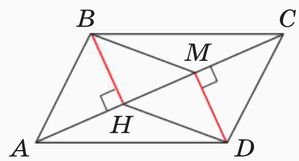


Рис. 12

Т 44 а) В параллелограмме $ABCD$ проведены перпендикуляры к диагонали AC (рис. 12). Докажите, что четырёхугольник $HBMD$ — параллелограмм.
б) В параллелограмме $ABCD$ проведены перпендикуляры к диагонали AC (рис. 12). Докажите, что $\triangle HBM = \triangle MDH$. Равенство каких ещё геометрических фигур можно установить, исходя из условия задачи?

Т 45 а) Точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Точки K, L, M и N — середины отрезков OA, OB, OC и OD соответственно. Можно ли утверждать, что четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм?
б) O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Каждую диагональ продлили за обе соединяемые ими вершины параллелограмма на отрезки, равные половине этой диагонали. Концы отрезков последовательно соединили. Можно ли утверждать, что получившийся четырёхугольник — параллелограмм?

46 а) Отрезок BO — медиана треугольника ABC, отрезок OC — медиана треугольника BCD (рис. 13). Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
б) Середины сторон параллелограмма последовательно соединили отрезками. Можно ли утверждать, что получившийся четырёхугольник — параллелограмм?

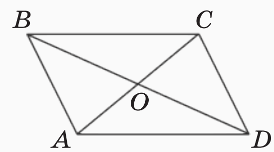


Рис. 13

47 В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов B и D пересекают диагональ AC в точках M и N соответственно. Докажите, что четырёхугольник $MBND$ — параллелограмм.

Неверно! Объясните, почему неверно высказывание: «Четырёхугольник, у которого две пары равных сторон, является параллелограммом». Укажите верное высказывание.

К Т 48 Постройте параллелограмм: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по диагоналям и углу между диагоналями; в) по двум смежным сторонам и диагонали, соединяющей их концы; г) по двум диагоналям и высоте.

49 а) На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отметили точки M и N так, что $BM = DN$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.
б) Точки M и N — соответственно середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $ANCM$ — параллелограмм.

Т 50 а) В треугольнике ABC продолжили медиану BM за точку M на отрезок MD, равный медиане BM. Точку D соединили с точками A и C. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Биссектриса угла A пересекает сторону BC параллелограмма $ABCD$ в точке E, а биссектриса угла C пересекает сторону AD в точке F. Докажите, что четырёхугольник $AECF$ — параллелограмм.

51 Пользуясь свойствами и признаками параллелограмма, придумайте с соседом по парте способ нахождения расстояния между двумя пунктами на одном берегу реки, находясь на другом её берегу, если вам известны расстояния до этих пунктов.

ПОВТОРЯЕМ

1. Используя данные рисунка *14*, докажите, что $AB = DE$.
2. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC. Прямая BD пересекает отрезок AC в точке O. Докажите, что: а) $\angle BAD = \angle BCD$; б) $AO = OC$.

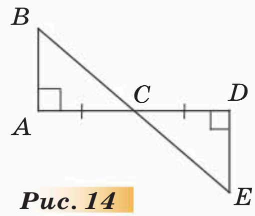


Рис. 14

П. 2.4

Т 52 Начертите прямоугольный треугольник ABD с гипотенузой BD. Проведите через вершины B и D прямые, параллельные сторонам AD и AB соответственно. Обозначьте точку C — точку пересечения этих прямых. Определите вид получившегося четырёхугольника.

Т 53 Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что: а) $\triangle AOB = \triangle COD$; б) $\triangle ABD = \triangle CAD$. Какие ещё равные треугольники вы можете указать?

Т 54 а) Дан прямоугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOB и BOC — равнобедренные.
б) В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, $\angle ADB = 23°$. Найдите углы AOB и AOD.

55 а) В прямоугольнике $ABCD$ диагональ BD равна 13 дм. Периметр треугольника ABD равен 30 дм. Найдите периметр прямоугольника.
б) Периметр прямоугольника равен 48 см, одна из его сторон в 3 раза больше другой. Найдите стороны прямоугольника.

56 а) Чему равен угол между диагоналями прямоугольника $ABCD$, если $\angle ADB = 37°$?
б) Угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$ равен 72°. Найдите угол CAD.

57 а) Диагонали прямоугольника пересекаются в точке O, $\angle ACB$ равен 30°, $CD = 14$ см. Найдите периметр треугольника AOB.
б) Биссектриса угла прямоугольника делит бóльшую сторону прямоугольника, равную 9 см, пополам. Найдите периметр прямоугольника.

58 а) В прямоугольнике $ABCD$ точка E — середина стороны BC, $AE = DE$. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр равен 48 см?
б) Известно, что периметр прямоугольника равен 54 см. Биссектрисы углов B и C пересекаются на стороне AD. Чему равны стороны прямоугольника?

59 а) Докажите, что если диагонали параллелограмма образуют равные углы с одной из его сторон, то такой параллелограмм — прямоугольник.
б) Докажите, что если точка пересечения диагоналей параллелограмма равноудалена от его соседних вершин, то этот параллелограмм — прямоугольник.

К 60 а) Точка пересечения диагоналей прямоугольника удалена от его сторон на 5 см и 6 см. Чему равен периметр прямоугольника?
б) Периметр прямоугольника равен 32 см, одна из его сторон на 2 см меньше другой. Найдите расстояния от точки пересечения диагоналей прямоугольника до его сторон.

61 а) Докажите разными способами, что медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине.
б) Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма с неравными смежными сторонами образуют при пересечении прямоугольник.

62 а) В четырёхугольнике $ABCD$: $\angle ABD = \angle CAB$, $\angle DBC = \angle CAD$, $AB = CD$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является прямоугольником.
б) Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. $AO = OB$, $CO = OD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник.

К 63 Постройте прямоугольник: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями.

К Т 64 На рисунке *15* гранями параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ являются прямоугольники. Угол между диагоналями грани DD_1C_1C равен 60°. Чему равна длина ребра DC, если $DC_1 = 19$ см и $DC < CC_1$.

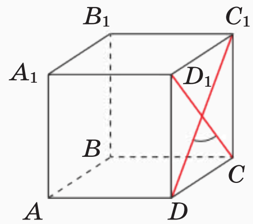


Рис. 15

65 Докажите, что вершины прямоугольника принадлежат окружности с центром в точке пересечения диагоналей и радиусом, равным половине диагонали.

66 Найдите углы, на которые диагональ делит угол прямоугольника, если серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит его сторону в отношении $2 : 1$.

Т 67 Чему равен угол между диагоналями прямоугольника, если серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника пересекает его сторону под углом, равным углу между диагоналями?

К 68 Постройте прямоугольник: а) по периметру и диагонали; б) по периметру и углу между диагоналями; в) по разности двух смежных сторон и диагонали.

ПОВТОРЯЕМ

1. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее о снование AC, $AB = CD$. Прямая BD пересекает AC в точке O. Докажите, что:
   а) $BD \perp AC$; б) AO — медиана треугольника ABD.
2. Назовите наибольший и наименьший углы в треугольнике ABC, если в нём:
   а) $AB = 10$ см, $BC = 9$ см, $AC = 8$ см;
   б) $AB = 30$ мм, $BC = 17$ мм, $AC = 3$ см.
3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD, $\angle ADB = 110°$, $\angle ABC = 2\angle BAD$. Чему равна градусная мера угла CBD?

П. 2.5

К 69 Начертите две перпендикулярные прямые и обозначьте точку их пересечения буквой O. На одной прямой отложите равные отрезки OA и OC, на другой — равные отрезки OB и OD. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

70 Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O (рис. 16). Укажите: а) биссектрису треугольника ABC; б) медиану треугольника ABD; в) высоту треугольника BCD.

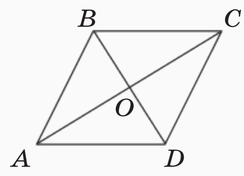


Рис. 16

71 а) Известно, что сумма длин трёх любых сторон параллелограмма равна одному и тому же числу. Докажите, что диагонали этого параллелограмма перпендикулярны.
б) Докажите, что если смежные стороны параллелограмма равны, то такой параллелограмм — ромб.

Т **72** Докажите, что диагонали ромба разбивают его на четыре равных треугольника.

73 а) Диагональ ромба $ABCD$ образует со стороной AB угол, равный $29°$. Найдите углы ромба.
б) Один из углов ромба $ABCD$ равен $56°$, диагонали ромба пересекаются в точке O. Найдите углы треугольника BOC.

Т **74** а) Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Чему равны углы ромба?
б) Найдите периметр ромба $ABCD$, если угол B равен $60°$, а диагональ $AC = 9$ см.

75 а) Найдите углы ромба, если его периметр равен 28, а высота — 3,5.
б) Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, образует со стороной ромба угол в $30°$. Найдите периметр ромба, если меньшая его диагональ равна 5.

76 Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекают его стороны BC и AD в точках F и E соответственно. Определите вид четырёхугольника $ABFE$.

77 Постройте ромб: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу; в) по высоте и углу.

78 а) Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются середины сторон прямоугольника, — ромб.
б) Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются середины сторон ромба, — прямоугольник.

79 Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что середины отрезков AO, BO, CO и DO являются вершинами ромба.

80 а) Докажите, что высоты ромба равны.
б) Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, делит сторону ромба пополам. Меньшая диагональ равна 12 см. Найдите периметр и углы ромба.
в) Найдите углы ромба, если высота, проведённая из вершины тупого угла, отсекает от ромба равнобедренный треугольник.

К **81** Постройте ромб: а) по острому углу и диагонали, выходящей из этого угла; б) по стороне и углу между стороной и диагональю.

ПОВТОРЯЕМ

1. Докажите, что в равнобедренном треугольнике высоты, проведённые к боковым сторонам, равны.
2. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что $AB = AC$. Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные сторонам угла и пересекающиеся в точке O. Докажите, что точка O лежит на биссектрисе угла A.

п. 2.6

Т 82 Диагональ AC квадрата $ABCD$ равна 5 см. а) Какова длина диагонали BD? б) Чему равны углы треугольника COB, где O — точка пересечения диагоналей квадрата?

83 а) Докажите, что если две соседние стороны прямоугольника равны, то этот прямоугольник является квадратом.
б) Докажите, что если один из углов ромба прямой, то этот ромб является квадратом.

84 У каких параллелограммов: а) все углы равны; б) все стороны равны; в) диагонали равны; г) диагонали перпендикулярны?

К Т 85 а) Внутри квадрата $ABCD$ отметили точку M так, что треугольник AMB — равносторонний. Докажите, что треугольник CMD — равнобедренный.
б) Вершины M и K равностороннего треугольник AMK принадлежат соответственно сторонам BC и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MK \parallel BD$.

Т 86 а) Докажите, что середины сторон квадрата являются вершинами квадрата.
б) Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Докажите, что точки пересечения этих прямых являются вершинами квадрата.

87 а) Периметр квадрата равен 60 см. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его стороны.
б) Расстояние от точки пересечения диагоналей квадрата до его стороны равно 6 см. Чему равен периметр квадрата?

К Т 88 а) В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы и гипотенузы проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что образовавшийся четырёхугольник — квадрат.
б) В прямоугольном треугольнике ABC из точки O — пересечения биссектрис — провели перпендикуляры OM и OK к катетам CA и CB соответственно. Докажите, что $CMOK$ — квадрат.

Неверно! Укажите неверные высказывания:
а) четырёхугольник, который имеет два прямых угла, — прямоугольник;
б) четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями — ромб;
в) четырёхугольник с равными диагоналями — прямоугольник;
г) четырёхугольник, диагонали которого перпендикулярны и равны, — квадрат;
д) любой квадрат является параллелограммом;
е) любой ромб является квадратом;
ж) любой прямоугольник является квадратом;
з) любой квадрат является прямоугольником;
и) любой квадрат является ромбом;
к) существует ромб, который является прямоугольником;
л) существует квадрат, который не является ромбом;
м) если диагонали четырёхугольника не перпендикулярны, то он не является ромбом;
н) если диагонали параллелограмма не равны, то он не является прямоугольником.

Т 89 Дан треугольник ABC с прямым углом C и квадрат $CMNP$ такой, что стороны CM и CN лежат на катетах, а вершина P — на гипотенузе треугольника ABC. Найдите периметр квадрата, если известно, что $AC = CB = 10$ см.

К Т 90 а) На сторонах AB, BC, CD, AD квадрата $ABCD$ последовательно отложили равные между собой отрезки AM, BN, CP и DL. Докажите, что четырёхугольник $MNPL$ — квадрат.
б) На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяли точки M и N так, что $AM = AN$ (рис. *17*). Докажите, что треугольник MCN — равнобедренный. Может ли треугольник MCN быть равносторонним?

К Т 91 а) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (рис. *18*). Докажите, что четырёхугольник BB_1D_1D — прямоугольник. Может ли четырёхугольник BB_1D_1D быть квадратом? Обоснуйте своё утверждение.

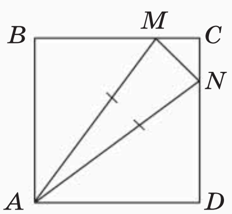


Рис. 17

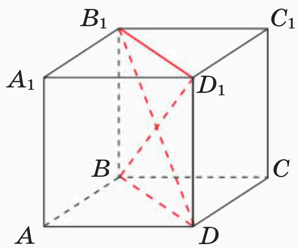


Рис. 18

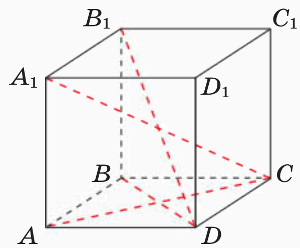


Рис. 19

б) В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели диагонали куба B_1D и A_1C. Докажите, что $\triangle AA_1C = \triangle BB_1D$ (рис. *19*).

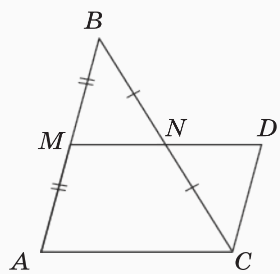


Рис. 20

ПОВТОРЯЕМ

1. M и N — середины сторон треугольника ABC (рис. *20*). Отрезок MN продолжили на отрезок ND, равный MN. Точки C и D соединили. Докажите, что: а) $CD = AM$; б) $MD \parallel AC$.
2. Прямая MN параллельна прямой EF. Найдите расстояние между этими прямыми, если $\angle MFE = 30°$, $MF = 8{,}8$ см.
3. а) Как найти внешний угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, если известен угол при его основании?
б) Найдите внешний угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, если угол при его основании равен 37°.

П. 2.7

92 а) Средняя линия треугольника, параллельная основанию, равна 7 см. Чему равно основание треугольника?
б) Сторона треугольника равна 19. Чему равна средняя линия треугольника, параллельная этой стороне?

93 На рисунке *21*: $a \parallel b$. Найдите неизвестную величину x.

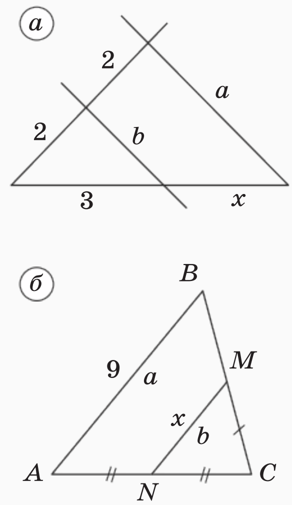


Рис. 21

94 а) Периметр треугольника равен 22 см. Чему равен периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника?
б) Периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника, равен 14 см. Чему равен периметр данного треугольника?

К Т **95** а) Может ли средняя линия треугольника быть перпендикулярной его стороне; двум сторонам?
б) Могут ли средние линии треугольника быть равными 3 см, 4 см и 10 см? Почему?

96 а) Чему равны углы треугольника, две средние линии которого равны и перпендикулярны?
б) Средние линии треугольника образуют равнобедренный треугольник с углом в 40° при вершине, противолежащей основанию. Чему равны углы исходного треугольника?

97 а) Боковая сторона равнобедренного треугольника в два раза больше его основания, равного 25. Чему равен периметр треугольника, образованного средними линиями данного треугольника?
б) Периметр равностороннего треугольника равен 27 см. Найдите длину средней линии этого треугольника.

98 Средние линии треугольника относятся как $3:4:5$. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 48 см.

К Т **99** Начертите треугольник ABC. Отметьте точки M, E и N — середины сторон AB, BC и AC соответственно. Соедините отмеченные точки.
а) Определите вид четырёхугольника $AMEN$.
б) Определите вид четырёхугольника $AMEC$.
в) Назовите все треугольники, которые равны треугольнику EMN. Запишите соответствующие равенства.

К **100** Как построить треугольник, если заданы середины его сторон? Как разрезать треугольник на две части так, чтобы из них можно было составить параллелограмм?

К Т **101** а) В треугольнике ABC: MN — средняя линия, параллельная стороне AC, биссектриса BD пересекает MN в точке K. Чему равна длина BD, если $BK = 6{,}5$?
б) Докажите, что любой отрезок, соединяющий вершину B треугольника ABC с внутренней точкой отрезка AC, делится средней линией треугольника, параллельной стороне AC, пополам.

Т **102** Точки M и N — середины соответственно сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что прямые AM и CN делят диагональ BD на три равные части.

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке *22*: $AB = CD$, $AO = OD$, $BO = OC$. Докажите, что: а) $\angle ABD = \angle DCA$; б) $BC \parallel AD$.
2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AD. Найдите углы этого треугольника, если $\angle ADB = 108^\circ$.
3. а) Как найти угол между биссектрисами двух углов разностороннего треугольника, если известен его третий угол?
б) Найдите угол между биссектрисами углов A и B треугольника ABC, если $\angle C = 42^\circ$.

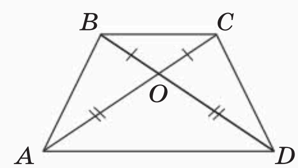


Рис. 22

П. 2.8

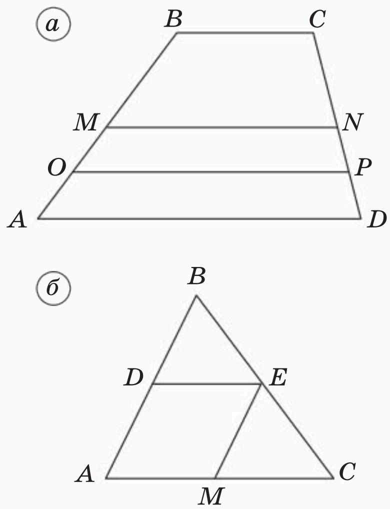


Рис. 23

Т 103 Используя клетчатую бумагу, начертите: а) произвольную трапецию; б) прямоугольную трапецию; в) равнобедренную трапецию.

Т 104 На рисунке *23, а*: $AD \parallel OP \parallel MN \parallel BC$. Сколько трапеций изображено?
б) Сколько трапеций изображено на рисунке *23, б*, если известно, что $ME \parallel AB$, $DE \parallel AC$?

105 а) Найдите неизвестные углы трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 52°$, $\angle D = 47°$.
б) Один из углов равнобедренной трапеции равен 62°. Найдите остальные углы трапеции.

106 а) Наименьший угол прямоугольной трапеции в 5 раз меньше её наибольшего угла. Чему равны углы трапеции?
б) В равнобедренной трапеции угол между боковой стороной и высотой, проведённой из вершины тупого угла, равен 44°. Найдите углы трапеции.

107 а) Найдите углы трапеции $ABCD$, прилежащие к боковой стороне AB, если $\angle A : \angle B = 7 : 2$.
б) Чему равны углы трапеции $ABCD$, прилежащие к боковой стороне CD, если угол C на 36° больше угла D?

108 а) Периметр равнобедренной трапеции равен 54 см, боковая сторона на 6 см больше меньшего основания. Большее основание равно 18 см. Найдите стороны трапеции.
б) Периметр трапеции равен 52 см, боковые стороны — 14 см и 13. Чему равны основания трапеции, если одно из них на 15 см больше другого?

Т 109 а) В прямоугольной трапеции один из углов равен 60°, основания трапеции равны 3 и 8 см. Найдите бо́льшую сторону этой трапеции.
б) Один из углов прямоугольной трапеции равен 45°, а её основания равны 9 см и 15 см. Найдите меньшую сторону трапеции.

110 а) Основания трапеции относятся как 7 : 4, а их разность равна 12 см. Найдите среднюю линию трапеции.
б) Периметр трапеции равен 36 см, а сумма боковых сторон равна 18 см. Найдите среднюю линию трапеции.

111 а) Средняя линия трапеции равна 19 см, а меньшее основание — 7 см. Найдите большее основание трапеции.
б) Средняя линия трапеции равна 12 см, а одно из оснований больше другого на 4 см. Найдите основания трапеции.
в) Основания трапеции относятся как 2 : 5, а средняя линия равна 21 см. Найдите основания трапеции.

Т 112 а) Средняя линия трапеции равна 20 см. Одна из диагоналей делит её на два отрезка, разность которых равна 2 см. Найдите основания трапеции.
б) Основания трапеции равны 1 см, 5 см и 8 см. Найдите отрезки, на которые делит среднюю линию трапеции одна из её диагоналей.

Т 113 а) Основания трапеции равны 6 см и 10 см. Найдите длины отрезков, на которые диагонали трапеции делят среднюю линию.

б) Основания трапеции равны 8 и 20. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.
в) Меньшее основание трапеции равно 4, отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен 3 см. Найдите бóльшее основание трапеции.

Т 114 а) Докажите, что высота, опущенная из вершины тупого угла на бóльшее основание равнобедренной трапеции, делит его на отрезки, больший из которых равен средней линии трапеции, а меньший — разности её оснований?
б) Диагональ равнобедренной трапеции равна 10 см и составляет с бóльшим основанием угол 60°. Чему равна средняя линия трапеции?

К Т 115 Обсудите задание с соседом по парте и постройте: а) равнобедренную трапецию по основанию, боковой стороне и углу между ними; б) прямоугольную трапецию по меньшей боковой стороне и основаниям.

Т 116 а) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC больший угол равен 135°. Высота трапеции, равная меньшему основанию, равна 9 см. Найдите большее основание трапеции.
б) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC меньший угол равен 45°. Высота трапеции равна 14 см, меньшее основание трапеции — 10 см. Найдите большее основание трапеции.

117 а) Высота трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD равна 7, $\angle A = 135^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. Найдите бóльшую боковую сторону.
б) Бóльшая боковая сторона трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD равна 10 см, $\angle A = 150^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Найдите высоту трапеции.

Т 118 а) Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = OD$, $BO = OC$.
б) Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей равнобедренной трапеции и точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны трапеции, перпендикулярна основаниям и делит их пополам.

Т 119 а) Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Её меньшее основание равно боковой стороне. Чему равны углы трапеции?
б) В трапеции три стороны равны, а четвёртая сторона в два раза больше других сторон. Чему равны углы трапеции?

120 а) Острый угол равнобедренной трапеции равен 60°, меньшее основание равно 16 см, диагональ делит острый угол пополам. Найдите периметр трапеции.
б) Основания равнобедренной трапеции 10 см и 20 см. Её диагональ делит больший угол трапеции пополам. Чему равен периметр трапеции?

121 а) Диагональ делит равнобедренную трапецию на два равнобедренных треугольника. Чему равны углы трапеции?
б) Диагональ AC равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции, если $\angle CAD = 28^\circ$.
в) Диагонали равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярны. Найдите острый угол трапеции, если $\angle ABD = 50^\circ$.

К Т 122 а) Диагональ прямоугольной трапеции разбивает её на два треугольника, один из которых является равносторонним. Средняя линия трапеции равна m. Чему равны основания трапеции?
б) Один из треугольников, образованных диагональю прямоугольной трапеции с её сторонами, — равносторонний со стороной a. Чему равна средняя линия этой трапеции?

Т 123 Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, если известно, что длина её средней линии равна a.

К Т 124 Постройте трапецию:
а) по основанию, высоте и диагоналям;
б) по боковым сторонам, высоте и одной из диагоналей;
в) по основаниям и диагоналям.

ПОВТОРЯЕМ

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медиана BM образует угол 30° с боковой стороной. Из точки M проведена высота MH треугольника BMC. Найдите HC, если $AB = 12$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C внешний угол при вершине B равен 120°, $BC + AB = 36$. Найдите BC и AB.

П. 2.9

Т 125 а) В треугольнике ABC сторона AB разделена на 4 равные части, и через полученные точки проведены прямые, параллельные стороне AC, равной 24 см. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника.
б) В трапеции боковая сторона разделена на четыре равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные основаниям трапеции. Меньшее основание равно 8, большее — 12. Найдите длины отрезков параллельных прямых, заключённых между боковыми сторонами трапеции.

Т 126 Стороны угла с вершиной M пересечены двумя параллельными прямыми в точках A, B и C, D соответственно. Точка A лежит между точками M и B, точка C лежит между точками M и D. Найдите:
а) CD, если $AM = 4$ см, $AB = 2$ см, $MD = 6$ см;
б) CM и DM, если $MA : MB = 2 : 3$ и $MD - MC = 4$ см.

К Т 127 Разделите данный отрезок: а) на 5 частей, б) на 6 частей.

Т 128 Основания трапеции равны 14 см и 20 см. Одна из боковых сторон разделена на три равные части, и через точки деления проведены прямые, параллельные основанием трапеции. Найдите отрезки этих прямых, заключённые внутри трапеции.

Т 129 В треугольнике ABC прямая, проходящая через вершину A, делит медиану CM пополам. Докажите, что эта прямая делит сторону BC в отношении $2 : 1$, считая от вершины B.

ПОВТОРЯЕМ

1. Докажите, что в равнобедренном треугольнике середина основания равноудалена от боковых сторон.
2. В окружности с центром O проведён диаметр AB и хорда AC. Докажите, что $\angle BOC = 2\angle BAC$.
3. Из точки M к окружности с центром O проведены две касательные. A и B — точки касания. $\angle M = 50^\circ$. Чему равен угол AOB?

П. 2.10

К Т 130 Начертите окружность с центром в точке O и проведите к ней четыре касательные так, чтобы они образовывали четырёхугольник.

К Т **131** Можно ли описать окружность: а) около четырёхугольника, у которого только один прямой угол? только два прямых угла? б) около прямоугольной трапеции? в) около ромба?

К Т **132** а) В какой прямоугольник можно вписать окружность?
б) В трапеции равны три стороны. Можно ли в такую трапецию вписать окружность?

Т **133** а) В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 11$, $CD = 14$. Найдите четвёртую сторону данного четырёхугольника.
б) Около окружности описан четырёхугольник $ABCD$. $AB : BC : CD = 1 : 6 : 9$, $P_{ABCD} = 20$. Найдите бóльшую строну этого четырёхугольника.

134 Определите, можно ли описать окружность около четырёхугольника $ABCD$, если углы A, B, C и D равны соответственно:
а) $90°$, $90°$, $40°$, $140°$; б) $168°$, $120°$, $12°$, $60°$.

135 Радиус окружности, вписанной в квадрат, равен 7 см. Найдите периметр квадрата.

Т **136** Найдите неизвестные углы: а) вписанного четырёхугольника $ABCD$, если углы A и C равны, а угол D равен $40°$; б) вписанной трапеции, если сумма двух из её углов равна $310°$.

137 В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D$. Докажите, что около этого четырёхугольника можно описать окружность.

Т **138** Равнобедренная трапеция описана около окружности. Найдите:
а) боковую сторону трапеции, если её средняя линия равна 12 см;
б) среднюю линию трапеции, если её периметр равен 24 см.

К **139** Докажите, что если биссектрисы углов четырёхугольника, пересекаясь, образуют четырёхугольник, то около образованного четырёхугольника можно описать окружность.

К **140** а) Докажите, что центр окружности, вписанной в ромб, является точкой пересечения его диагоналей, а радиус окружности равен половине высоты ромба.
б) Докажите, что радиус окружности, вписанной в трапецию, равен половине её высоты.

141 Диагональ ромба, исходящая из вершины угла $60°$, равна 36 см. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

142 Найдите среднюю линию прямоугольной трапеции, в которой бóльшая боковая сторона равна 15 см, а радиус вписанной окружности равен 4 см.

К **1** В параллелограмме $ABCD$ $\angle ABD = 40°$; центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CDA, лежат на диагонали BD. Найдите $\angle DBC$.

2 Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Известно, что $\angle ABC = 72°$, $\angle BCD = 102°$, $\angle AMD = 110°$. Чему равен угол ACD?

К **3** Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M, $\angle AMB = 80°$. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, причём $\angle AKD = 20°$, а прямые BC и DA — в точке N, причём $\angle ANB = 40°$. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$. Сколько решений имеет задача?

К 4 Постройте ромб: а) по острому углу и разности диагоналей;
б) по острому углу и сумме стороны и высоты;
в) по стороне и сумме диагоналей;
г) по сумме диагоналей и углу между диагональю и стороной;
д) по стороне и разности диагоналей.

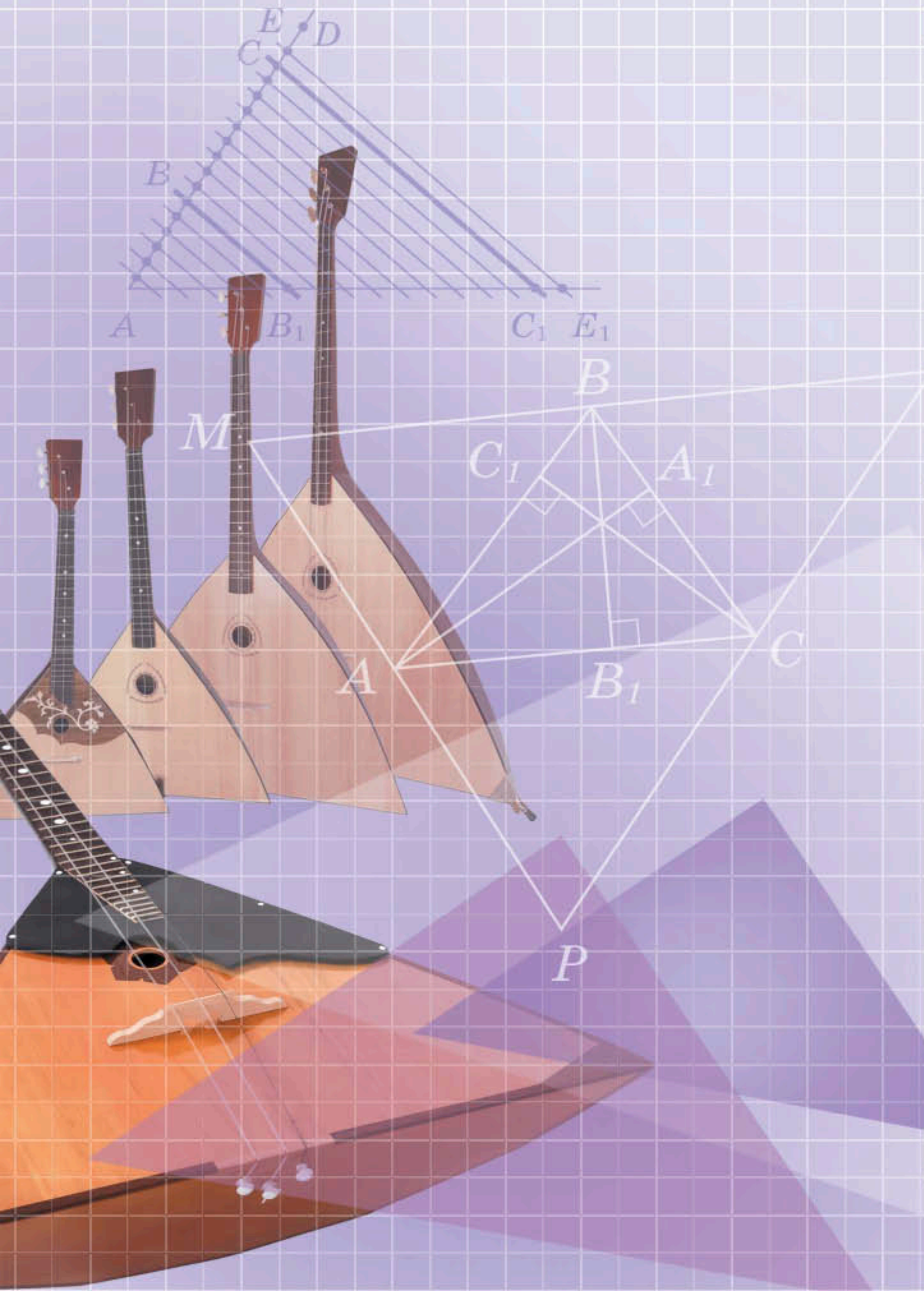
ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Дайте определение параллелограмма. Докажите, что параллелограмм является выпуклым четырёхугольником.
- Докажите, что в параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
- Докажите, что диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.
- Сформулируйте и докажите теоремы о признаках параллелограмма.
- Какой параллелограмм называется прямоугольном? Докажите, что диагонали прямоугольника равны.
- Сформулируйте и докажите теоремы о признаках прямоугольника.
- Какой параллелограмм называется ромбом? Докажите, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.
- Сформулируйте и докажите теоремы о признаках ромба.
- Перечислите свойства квадрата.
- Что называют средней линией треугольника? Докажите теорему о средней линии треугольника.
- Укажите свойства равнобедренной трапеции.
- Докажите теорему о средней линии трапеции.
- В какой четырёхугольник можно вписать окружность?
- Около какого четырёхугольника можно описать окружность?
- Докажите теорему Фалеса.
- Какой четырёхугольник называется трапецией? Как называются стороны трапеции? Какая трапеция называется равнобедренной; прямоугольной?

ГЛАВА 3

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

- ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ
- ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
- ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
- МЕТОД ПОДОБИЯ И НЕКОТОРЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ОКРУЖНОСТИ
- СВОЙСТВО БИССЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКА
- ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ



ИНТЕРЕСНО

Философ, ученик Сократа, учитель Аристотеля и Демосфена, вошедший в историю под прозвищем Платон, образованным от греческого слова, означающего «широкий», родился в 427 г. до н. э. Выкупив сад с домом недалеко от Афин, рядом с оливковой рощей, носившей имя одного из греческих героев Академа, Платон открыл свою школу, которую из-за её местоположения стали называть Академией. Ей суждено было просуществовать целых 915 лет! Над входом в Академию висела надпись «Не геометр, да не войдёт!», поскольку Платон рассматривал математику как первую ступень в изучении философии. Он считал, что изучение математических наук, к которым относил геометрию, арифметику, астрономию и музыку, помогает подготовить разум к постижению идей.

3.1 ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют отношением двух отрезков
- Какие отрезки называют пропорциональными
- Как построить четвёртый пропорциональный отрезок

С понятием отношения, пропорциональности, пропорции вы уже знакомы. Математические пропорции лежат в основе многих явлений нашей жизни. В этом пункте мы рассмотрим пропорциональность отрезков.

КАКИЕ ОТРЕЗКИ НАЗЫВАЮТ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ

Определение. **Отношением двух отрезков** называют отношение их длин.

Отношение двух отрезков, длины которых равны m и n (рис. 3.1), записывают в виде дроби $\frac{m}{n}$, и оно не зависит от единицы, выбранной для измерения отрезков.

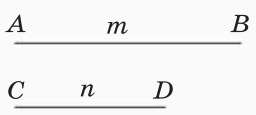


Рис. 3.1

Если в качестве единицы измерения взять отрезок n, то отношение отрезков m и n равно m единиц.

Например, даны отрезки $AB = 15$ см и $CD = 10$ см. Тогда отношение отрезка AB к отрезку CD равно $\frac{15}{10}$. Записывают это так: $\frac{AB}{CD} = \frac{15}{10}$, то есть $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}$, отсюда $AB = \frac{3}{2} CD$ $(AB = 1{,}5\, CD)$.

Рассмотрим теперь пару отрезков AB и CD и пару отрезков A_1B_1 и C_1D_1.

Говорят, что **отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1 если**

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}.$$

Например, отрезки $AB = 12$ см и $CD = 8$ см пропорциональны отрезкам $A_1B_1 = 9$ см и $C_1D_1 = 6$ см, так как

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{4}{3}.$$

Также можно говорить и о пропорциональности большего числа отрезков. Например, если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{EF}{E_1F_1},$$

то говорят, что отрезки AB, CD, EF пропорциональны соответственно отрезкам A_1B_1, C_1D_1, E_1F_1.

Докажем теперь теорему о пропорциональных отрезках.

Теорема. **Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.**

Доказательство. Пусть параллельные прямые пересекают одну сторону угла A в точках B и C, а другую соответственно в точках B_1 и C_1 (рис. 3.2).

Докажем, что $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$.

Предположим, что $\frac{AB}{BC} \neq \frac{AB_1}{B_1C_1}$.

Пусть, например, $\frac{AB}{BC} > \frac{AB_1}{B_1C_1}$. Возьмём на продолжении BC точку D такую, что $\frac{AB}{BD} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$, и разделим отрезок AB на n равных отрезков — таких, что каждый из них меньше отрезка CD (рис. 3.3).

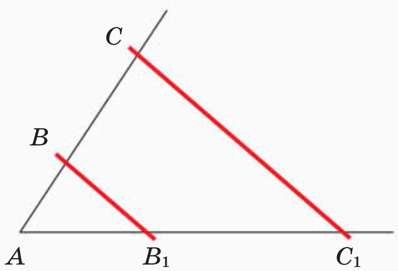


Рис. 3.2

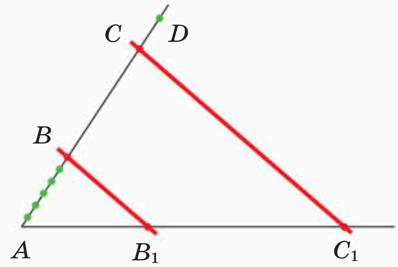


Рис. 3.3

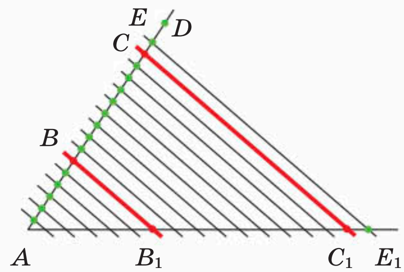


Рис. 3.4

Пусть длина такого отрезка будет равна a.

От точки B будем откладывать на луче BD последовательно отрезки длиной a до тех пор, пока конец одного из них не попадёт внутрь отрезка CD. (Так как a меньше длины отрезка CD, то такой момент наступит.) Обозначим этот конец отрезка буквой E.

Проведём через отмеченные точки прямые, параллельные прямым BB_1 и CC_1 (рис. 3.4). Точке E будет соответствовать точка E_1. Отметим, что $B_1E_1 > B_1C_1$.

Так как на стороне AD угла A отложили равные между собой отрезки, то по теореме Фалеса на стороне AE_1 будут также образованы равные между собой отрезки.

Отрезок AB был разделён на n равных отрезков, тогда на отрезке AB_1 будет также n равных отрезков. Пусть на отрезке BE будет m равных отрезков, тогда на отрезке B_1E_1 будет также m равных отрезков.

Значит, $\frac{AB}{BE} = \frac{n}{m}$ и $\frac{AB_1}{B_1E_1} = \frac{n}{m}$, то есть $\frac{AB}{BE} = \frac{AB_1}{B_1E_1}$.

$$\frac{AB}{BD} < \frac{AB}{BE} = \frac{AB_1}{B_1E_1} < \frac{AB_1}{B_1C_1}, \text{ то есть}$$

$$\frac{AB}{BD} < \frac{AB_1}{B_1C_1}, \text{ но } \frac{AB}{BD} = \frac{AB_1}{B_1C_1} \text{ —}$$

получили противоречие, значит, наше предположение неверно и

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}. \blacktriangledown$$

Замечание. Так же как и теорема Фалеса, эта теорема справедлива, если вместо сторон угла взять любые две прямые.

КАК ПОСТРОИТЬ ЧЕТВЁРТЫЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЙ ОТРЕЗОК

Теорема о пропорциональных отрезках даёт способ построения с помощью циркуля и линейки четвёртого пропорционального отрезка по известным трём отрезкам.

Пусть даны три отрезка — a, b и c (рис. 3.5). Нужно построить такой отрезок m, что $a : b = c : m$.

Построение.

1. Построим любой неразвёрнутый угол A.

2. На одной его стороне последовательно отложим отрезок $AB = a$, затем отрезок $BC = b$ (рис. 3.6).

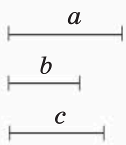


Рис. 3.5

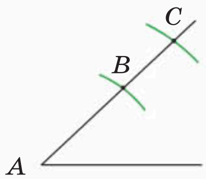


Рис. 3.6

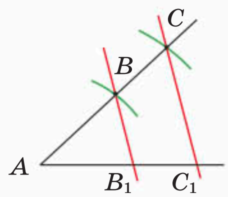


Рис. 3.7

3. На другой стороне угла A отложим отрезок AB_1, равный c.

4. Проведём прямую BB_1.

5. Через точку C проведём прямую a, параллельную прямой BB_1. Прямая a пересечёт луч AB_1 в точке C_1 (рис. 3.7).

Отрезок B_1C_1 будет искомым.

В самом деле, по теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1} \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{m}, \text{ то есть } B_1C_1 = m.$$

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

Рассмотрим одно уникальное деление произвольного отрезка длины a на два отрезка с длинами x и $a - x$, при котором отношение всего отрезка a к его большей части x равно отношению большей части x к меньшей части $a - x$ (рис. 3.8), то есть

$$a : x = x : (a - x).$$

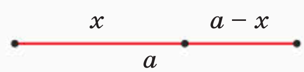


Рис. 3.8

Эта пропорция известна со времён Пифагора, тогда её называли *гармоническим отношением*.

Со времён Средневековья эту пропорцию называют божественной пропорцией или золотым сечением за впечатление гармонии и красоты, которое она создаёт.

Выясним, каким числом выражается золотое сечение.

Приняв длину отрезка a за единицу, получим уравнение:

$$1 : x = x\,(1 - x) \quad \text{или} \quad x^2 + x - 1 = 0.$$

Решив это уравнение, получим положительный корень

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}6.$$

В 1509 году итальянский математик Лука Пачоли посвятил книгу этой пропорции, назвав её божественной за уникальные свойства. Иллюстрации к книге делал великий художник, учёный и изобретатель Леонардо да Винчи. Считается, что именно он назвал эту пропорцию золотым сечением.

Это число x обозначают буквой φ (в честь Фидия, великого древнегреческого скульптора, использовавшего золотую пропорцию при создании своих произведений).

Итак, при золотом сечении бóльшая часть отрезка составляет примерно 0,6 всего отрезка.

Рассмотрим теперь ***золотой прямоугольник***, смежные стороны которого находятся в золотом отношении (рис. *3.9*). Золотой прямоугольник обладает интересными свойствами.

Так, если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то опять получим золотой прямоугольник (рис. *3.10*).

Если же процесс продолжать далее, то мы получим так называемые вращающиеся квадраты, и весь прямоугольник будет составлен из этих квадратов (рис. *3.11*).

Рис. 3.9

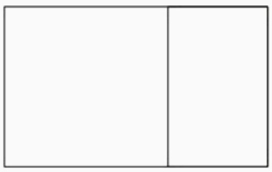


Рис. 3.10

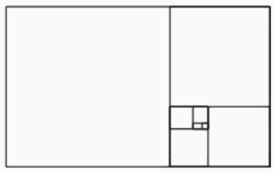


Рис. 3.11

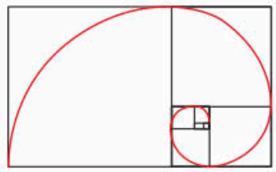


Рис. 3.12

При соединении вершин этих квадратов плавной кривой получим ***золотую спираль*** (рис. *3.12*), форму которой, кстати, повторяют и раковины моллюсков, и наша Вселенная.

Имеются и два типа ***золотых треугольников***. Это равнобедренные треугольники, стороны которых находятся в золотом отношении (рис. *3.13*). На рисунке *3.13, а* $AC : AB = \varphi$, на рисунке *3.13, б* $AB : AC = \varphi$.

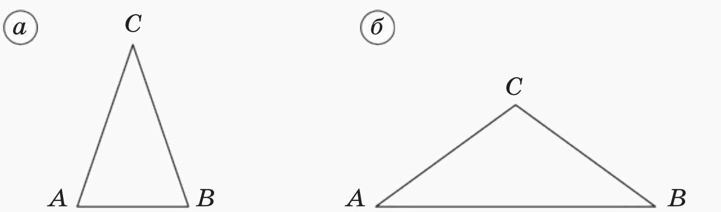


Рис. 3.13

Угол при вершине, противолежащей основанию золотого треугольника на рисунке *3.13, а*, равен 36°, а угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника на рисунке *3.13, б*, равен 108°.

Докажите самостоятельно, что равнобедренный треугольник с углом при вершине 108° является золотым.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют отношением двух отрезков?
- Найдите отношение отрезков $AB = 8$ см и $CD = 18$ см. Изменится ли это отношение, если длины отрезков выразить в дециметрах? миллиметрах?
- В каком случае говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1?
- Пропорциональны ли отрезки AB и CD соответственно отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если:

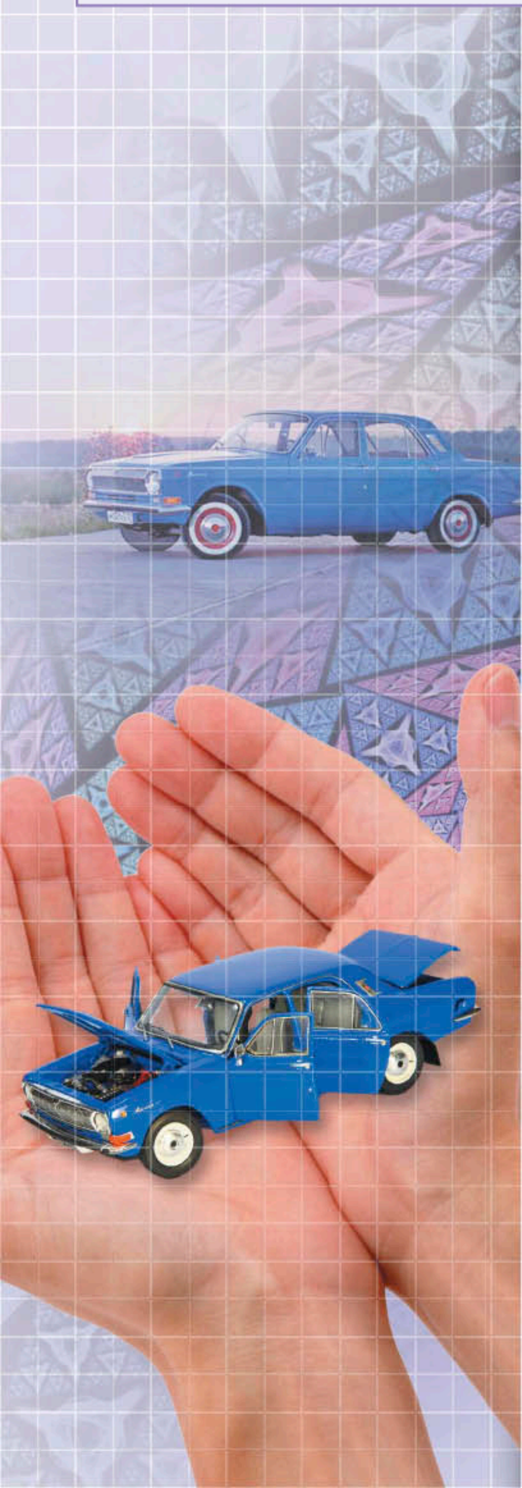
  а) $AB = 15$ мм, $CD = 21$ мм, $A_1B_1 = 40$ мм, $C_1D_1 = 56$ мм?

  б) $AB = 45$ см, $CD = 25$ см, $A_1B_1 = 18$ см, $C_1D_1 = 8$ см?
- Сформулируйте теорему о пропорциональных отрезках.
- Расскажите, как построить четвёртый пропорциональный отрезок, если даны три отрезка.

3.2 ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие фигуры называют подобными
- Какие треугольники называются подобными



Существование подобных фигур и тел является одной из самых важных характеристик евклидовой геометрии, изучаемой нами. С проявлениями подобия мы очень часто встречаемся в жизни, например, когда собираем точную модель бригантины или рассматриваем на странице учебника репродукцию картины известного художника.

ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ На основании личного опыта, интуиции мы достаточно хорошо умеем узнавать подобные предметы или фигуры, выделять их среди прочих.

Они имеют разные размеры, но **одинаковую форму**. Так, многие детские игрушки являются подобием реальных предметов; среди коллекционеров популярно коллекционирование маленьких копий автомобилей и т. п.

Среди знакомых вам геометрических фигур также есть имеющие одинаковую форму, например, все окружности или все квадраты имеют одинаковую форму (рис. *3.14*).

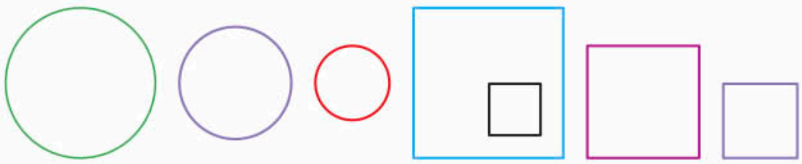


Рис. 3.14

В геометрии фигуры, имеющие одинаковую форму, называют **подобными**.

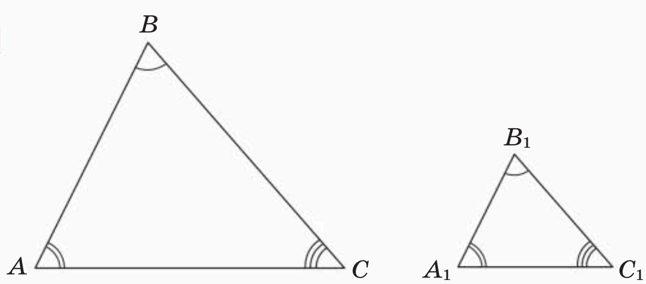
Среди множества треугольников тоже есть подобные. Изучать свойства подобия мы и начнём с подобных треугольников.

ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ На рисунке *3.15* изображены два треугольника с соответственно равными углами: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Стороны, лежащие против равных углов, называются **соответственными** (ещё такие стороны называют сходственными).

На рисунке *3.15* соответственными будут стороны BC и B_1C_1, AB и A_1B_1, AC и A_1C_1.

Рис. 3.15



Определение. Два треугольника называются подобными, если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, а соответственные стороны пропорциональны.

У треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC на рисунке *3.15* $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$, $\angle C_1 = \angle C$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{1}{2}$. По определению эти треугольники подобны.

Этот факт записывают так: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$ (читают: «Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC»).

Число $\frac{1}{2}$, которому равно отношение соответственных сторон, называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. А треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным 2, так как

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = 2.$$

Коэффициент — от латинского слова coefficiens, означает «содействующий».

Если треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия k, то треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$.

Равные треугольники также считаются подобными с коэффициентом подобия, равным 1.

Подобие обладает свойством транзитивности: если $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, а $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle A_2B_2C_2$, то $\triangle ABC \backsim \triangle A_2B_2C_2$ (рис. *3.16*)

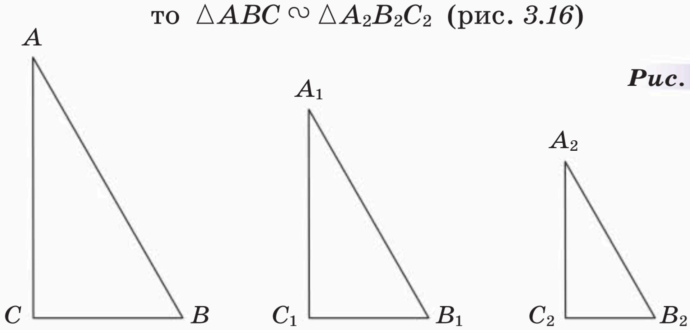


Рис. 3.16

Теорема. Отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Доказательство. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия k (рис. *3.17*).

Тогда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$.

Отсюда $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$.

$P_{ABC} = AB + BC + AC$, а $P_{A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1$, тогда

$$P_{A_1B_1C_1} = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = kAB + kBC + kAC = \\ = k(AB + BC + AC) = kP_{ABC}.$$

То есть $\frac{P_{A_1B_1C_1}}{P_{ABC}} = k$. ▼

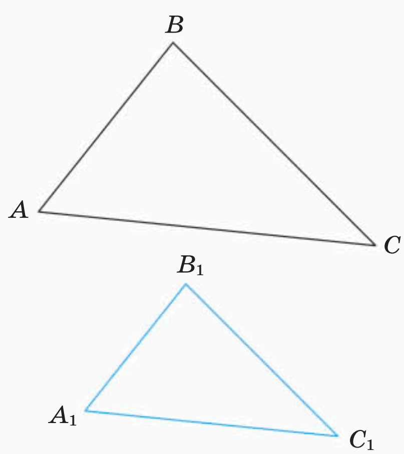
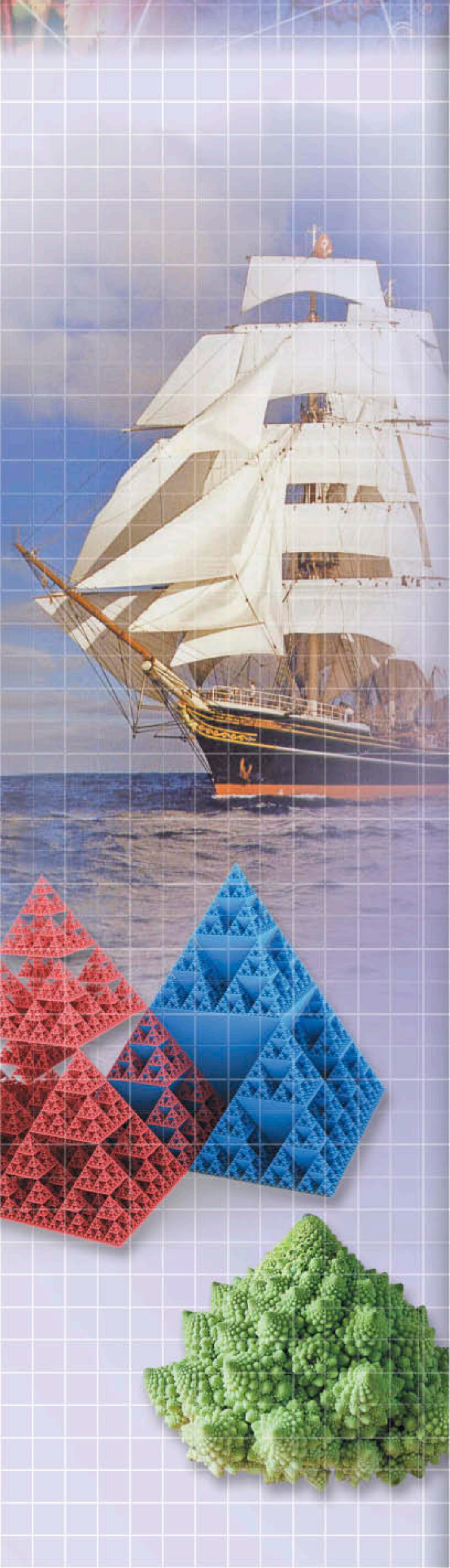


Рис. 3.17



ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Теорема. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, образуют с его сторонами подобные между собой треугольники.

Доказательство. Пусть параллельные прямые MN и AC пересекают стороны угла B (рис. *3.18*).

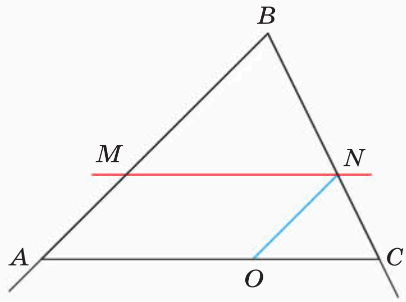


Рис. 3.18

Докажем, что $\triangle ABC \backsim \triangle MBN$.

В треугольниках MBN и ABC угол B — общий.

$\angle BMN = \angle A$, а $\angle BNM = \angle C$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми MN и AC и секущими AB и CB соответственно.

Из теоремы о пропорциональных отрезках следует, что

$$\frac{MA}{BM} = \frac{NC}{BN}.$$

Прибавим к обеим частям равенства 1:

$\frac{MA}{BM} + 1 = \frac{NC}{BN} + 1$. Отсюда $\frac{MA + BM}{BM} = \frac{NC + BN}{BN}$.

Так как $BM + MA = BA$, а $BN + NC = BC$, получаем

$$\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN}.$$

Докажем, что $\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}$.

Проведём $NO \parallel AB$. Тогда по теореме о пропорциональных отрезках получаем:

$$\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{AO}.$$

Так как четырёхугольник $AMNO$ — параллелограмм по определению, то $AO = MN$, тогда

$$\frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}.$$

Таким образом, получили, что

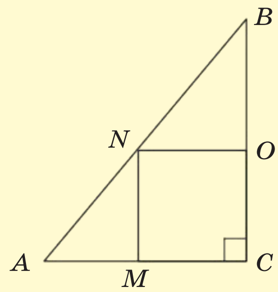
$$\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BN} = \frac{AC}{MN}.$$

В треугольниках ABC и MBN углы соответственно равны, а соответственные стороны пропорциональны. Значит, по определению $\triangle ABC \backsim \triangle MBN$. ▼

Следствие. Прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая другие его стороны, отсекает треугольник, подобный данному.

Задача 1. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $MNOC$. $MN = 6$ см, $AC = 10$ см. Найдите OB.

Решение. Четырёхугольник $MNOC$ — квадрат, следовательно, $NO \parallel AC$, тогда по следствию из основной



теоремы о подобных треугольниках $\triangle NBO \sim \triangle ABC$, значит,

$$\frac{BO}{BC} = \frac{NO}{AC}. \qquad (1)$$

$NO = OC = MC = MN = 6$ см (как стороны квадрата).
Пусть $BO = x$ см, тогда $BC = (6 + x)$ см.
Из (1) получаем уравнение:

$$\frac{x}{6 + x} = \frac{6}{10} \quad \text{или} \quad \frac{x}{6 + x} = \frac{3}{5},$$

$$5x = 18 + 3x, \quad 2x = 18, \quad x = 9.$$

Ответ: 9 см.

Задача 2. Стороны первого из двух подобных треугольников относятся как $3 : 5 : 7$. Меньшая сторона второго треугольника равна 4,2 см. Найдите его периметр.

Решение. По условию треугольники подобны, значит, соответственные стороны треугольников пропорциональны. Пусть стороны первого треугольника AB, BC и AC, а соответственные стороны второго треугольника A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1, коэффициент подобия равен k.
Тогда $A_1B_1 = kAB$; $A_1C_1 = kAC$; $B_1C_1 = kBC$. Отсюда

$$A_1B_1 : A_1C_1 : B_1C_1 =$$
$$= (kAB) : (kAC) : (kBC) =$$
$$= AB : AC : BC = 3 : 5 : 7.$$

Меньшая сторона равна 4,2 см и составляет 3 части.
Тогда 1 часть равна $4{,}2 : 3 = 1{,}4$ (см).
На периметр треугольника приходится $3 + 5 + 7 =$ $= 15$ частей. Значит,

$$P_{A_1B_1C_1} = 1{,}4 \cdot 15 = 21 \text{ (см)}.$$

Ответ: 21 см.

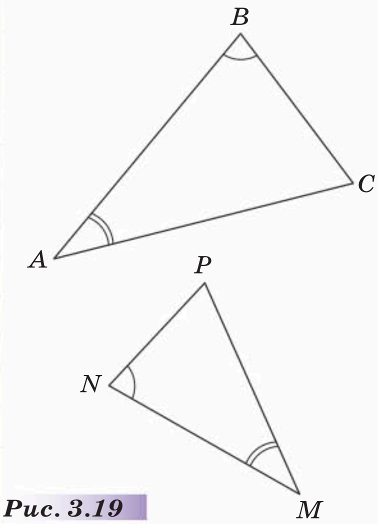


Рис. 3.19

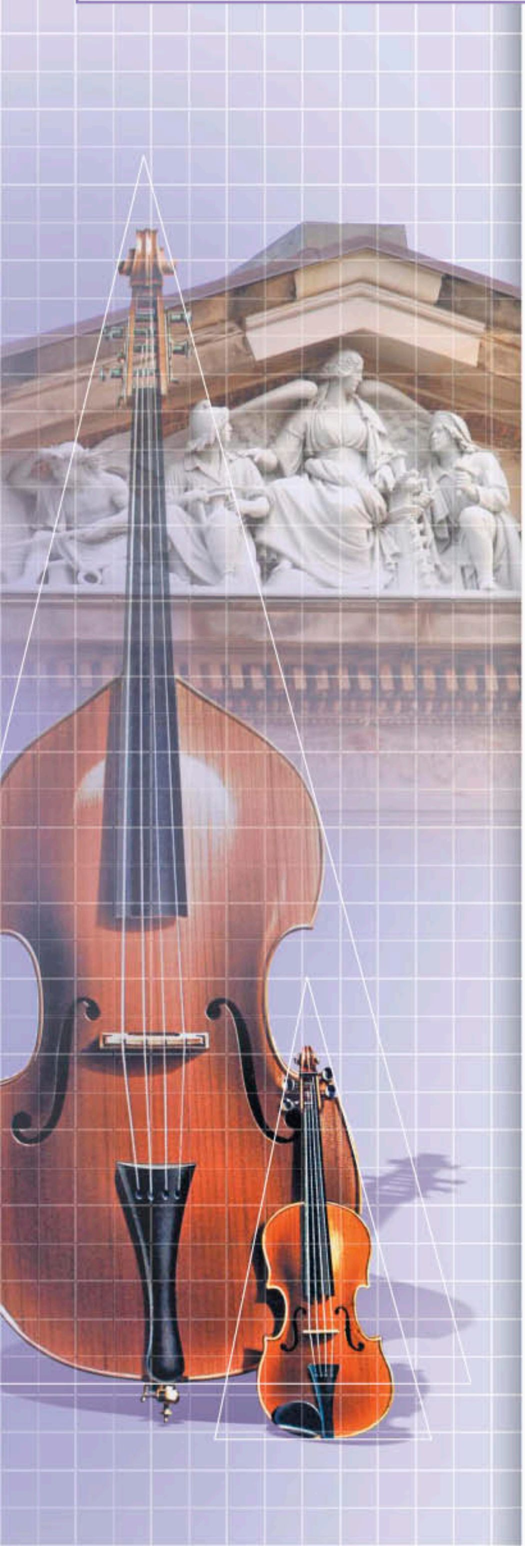
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие треугольники называют подобными?
- Какие стороны называются соответственными?
- На рисунке *3.19* изображены подобные треугольники ABC и NMP. Какие стороны будут пропорциональны? Запишите соответствующие равенства.
- Могут ли быть подобными остроугольный и прямоугольный треугольники? Обоснуйте свой ответ.
- Коэффициент подобия двух треугольников равен 0,5. Во сколько раз стороны одного треугольника больше соответствующих сторон другого треугольника?
- Можно ли утверждать, что равные треугольники подобны?
- Докажите основную теорему о подобных треугольниках.

3.3 ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- По каким признакам можно определить подобие треугольников



По каким признакам можно определить, являются ли два треугольника подобными?

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Рассмотрим треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC, в которых

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = k, \ \angle A = \angle A_1.$$

Докажем, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Если $k = 1$, то $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников, поэтому $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Пусть $k \neq 1$, например $k < 1$. Тогда $AB > A_1B_1$, $BC > B_1C_1$.

На стороне AB треугольника ABC отложим от точки A отрезок AB_2, равный A_1B_1, и через точку B_2 проведём прямую, параллельную стороне BC треугольника ABC (рис. 3.20).

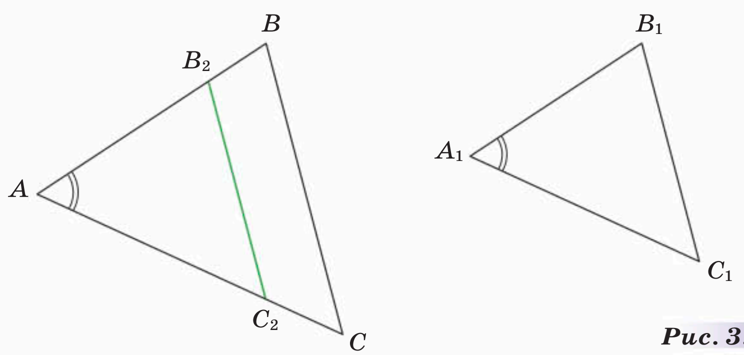


Рис. 3.20

Тогда $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$ по следствию из теоремы о подобных треугольниках. Отсюда $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC}$, а так как $AB_2 = A_1B_1$ и $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$, то $A_1C_1 = AC_2$. Следовательно, $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по первому признаку равенства треугольников.

$\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$, тогда и $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. ▼

Случай, когда $k > 1$, рассматривается аналогично.

Замечание. Этот признак подобия треугольников ещё называют **признаком подобия по двум сторонам и углу между ними.**

ВТОРОЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Теорема. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Докажем, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

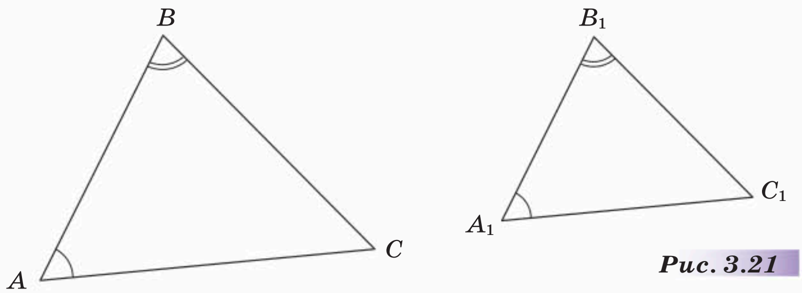


Рис. 3.21

1-й случай. $A_1B_1 = AB$, тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, по второму признаку, следовательно, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

2-й случай. $A_1B_1 \neq AB$.

Пусть, например, $AB > A_1B_1$ (рис. *3.21*). Отложим на стороне AB отрезок AB_2 равный A_1B_1.

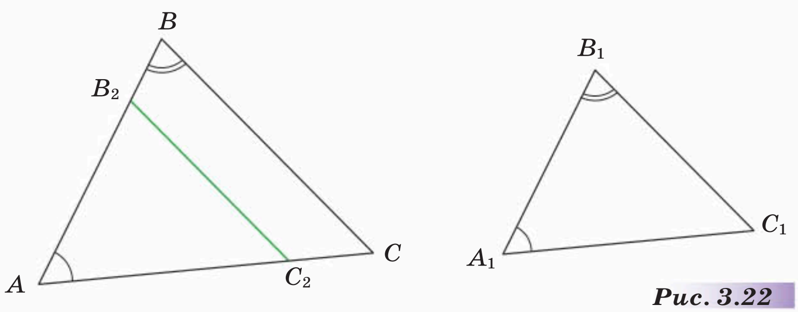
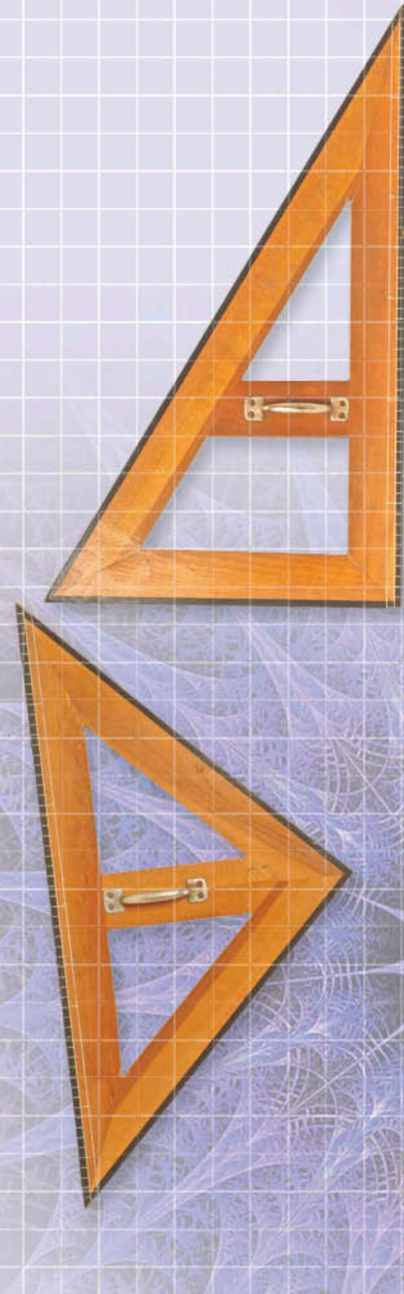


Рис. 3.22



Через точку B_2 проведём прямую B_2C_2, параллельную BC (рис. *3.22*).

Тогда $\angle AB_2C_2 = \angle B$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми BC и B_2C_2 и секущей AB.

Но $\angle B = \angle B_1$ по условию, значит $\angle AB_2C_2 = \angle B_1$.

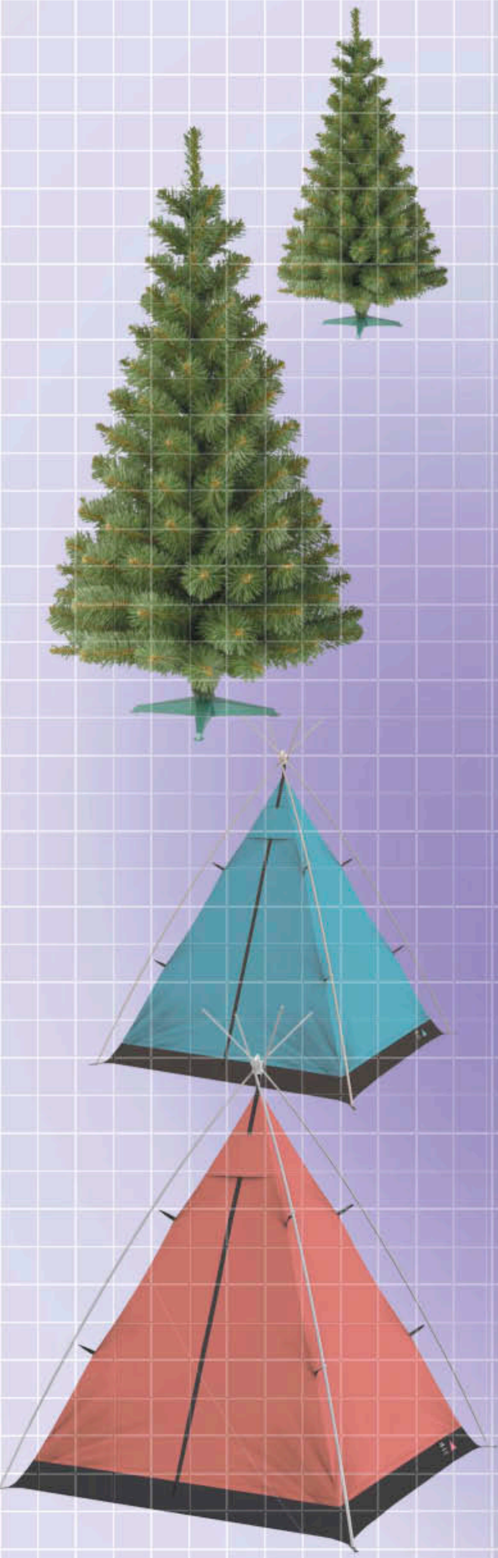
В треугольниках AB_2C_2 и $A_1B_1C_1$ имеем:

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle AB_2C_2 = \angle B_1,\ AB_2 = A_1B_1.$$

Следовательно, $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по второму признаку равенства треугольников.

По следствию из теоремы о подобных треугольниках $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$, а значит, и $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. ▼

Замечание. Этот признак подобия треугольников ещё называют **признаком подобия по двум углам**.



ТРЕТИЙ ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ТЕОРЕМА. **Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ в которых $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$.

Докажем, что $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.

При $k = 1$ треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC равны по третьему признаку равенства треугольников, следовательно, эти треугольники подобны.

Пусть $k \neq 1$, например $k < 1$. Тогда $A_1B_1 < AB$, $B_1C_1 < BC$, $A_1C_1 < AC$.

Отложим на стороне AB от точки A отрезок AB_2, равный отрезку A_1B_1, и проведём прямую B_2C_2, параллельную BC (рис. 3.23).

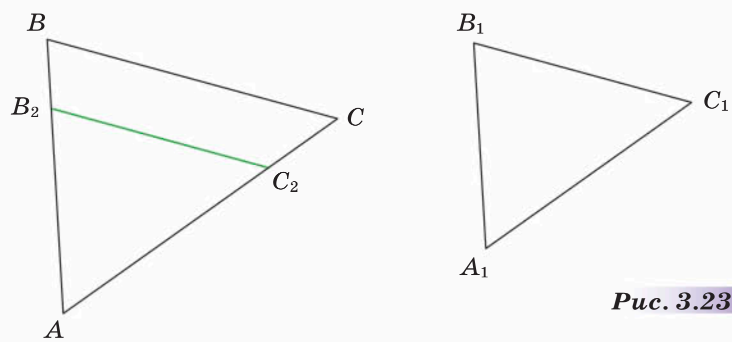


Рис. 3.23

Тогда $\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$, следовательно:

$$\frac{AB_2}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = \frac{AC_2}{AC}.$$

Так как $AB_2 = A_1B_1$, то $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC}$, но $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$ по условию, следовательно $B_2C_2 = B_1C_1$.

Аналогично доказывается, что $AC_2 = A_1C_1$.

Тогда $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ по третьему признаку равенства треугольников.

$\triangle AB_2C_2 \backsim \triangle ABC$, тогда и $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$. ▼

Случай, когда $k > 1$, доказывается аналогично. Докажите его самостоятельно.

Замечание. Этот признак подобия треугольников ещё называют признаком подобия по трём сторонам.

Мы рассмотрели три признака подобия треугольников. Вы, наверное, уже заметили аналогию признаков подобия треугольников с признаками их равенства: первый признак — по двум сторонам и углу между ними, так же и второй признак, и третий. Эта аналогия поможет вам запомнить признаки подобия треугольников.

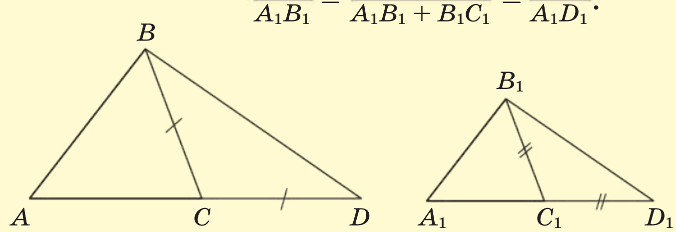
Задача 1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC + BC}{A_1C_1 + B_1C_1}$.

Докажите, что $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. Рассмотрим данные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ и проведём дополнительное построение: на продолжении сторон AB и A_1B_1 за точки B и B_1 отложим соответственно отрезки — BD, равный BC, и B_1D_1, равный B_1C_1. Соединим отрезками точки D и C, D_1 и C_1. Тогда $AD = AC + CD = AC + BC$,

$$A_1D_1 = A_1C_1 + C_1D_1 = A_1C_1 + B_1C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC + BC}{A_1B_1 + B_1C_1} = \frac{AD}{A_1D_1}.$$



Кроме того, $\angle A = \angle A_1$ по условию. Значит, $\triangle ABD \backsim \triangle A_1B_1D_1$. Следовательно, $\angle D = \angle D_1$ как соответственные.

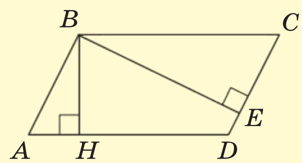
Так как $CD = BC$, то треугольник ABC — равнобедренный, тогда $\angle D = \angle CBD$ и $\angle ACB = 2\angle D$, как внешний угол треугольника BCD.

Аналогично $\angle A_1C_1B_1 = 2\angle D_1$.

Тогда $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$, кроме того, $\angle A = \angle A_1$. Значит, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам.

Ответ: 21 см.

Задача 2. Отрезки BH и BE — высоты параллелограмма $ABCD$, $BH = 9$ см, $BE = 12$ см. Сумма смежных сторон параллелограмма равна 42 см. Найдите стороны параллелограмма.



Решение. Рассмотрим треугольники ABH и BCE. BH и BE — высоты параллелограмма, значит, $\angle AHB = \angle BEC = 90°$, $\angle A = \angle C$ как противоположные углы параллелограмма. Тогда $\triangle ABH \backsim \triangle CBE$ по двум углам. Отсюда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{BE} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Пусть $AB = x$ см, тогда $BC = (42 - x)$ см.

Получаем уравнение: $\dfrac{x}{42 - x} = \dfrac{3}{4}$;

$$4x = 126 - 3x; \quad 7x = 126; \quad x = 18.$$

$$BC = (42 - x)\text{ см} = (42 - 18)\text{ см} = 24\text{ см}.$$

Ответ: 18 см и 24 см.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите первый признак подобия треугольников.
- Сформулируйте и докажите второй признак подобия треугольников.
- Сформулируйте и докажите третий признак подобия треугольников.
- Подобны ли:
  а) прямоугольный и равносторонний треугольники?
  б) два равнобедренных прямоугольных треугольника?
  Обоснуйте своё утверждение.
- Подобны ли прямоугольные треугольники, если у одного из них один из острых углов равен 50°, а у другого – 60°?
- Подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют:
  а) по равному тупому углу?
  б) по равному острому углу?
- Придумайте признаки подобия для:
  а) равнобедренных треугольников;
  б) прямоугольных треугольников.

3.4

МЕТОД ПОДОБИЯ И НЕКОТОРЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ОКРУЖНОСТИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В чём состоит метод подобия
- Свойство касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности
- Свойство пересекающихся хорд
- Теорему Птолемея

Подобие треугольников широко используется при доказательстве теорем и решении задач. Продолжая знакомиться с методами геометрии, рассмотрим метод подобия. В чём же он состоит и как его применять?

МЕТОД ПОДОБИЯ Метод подобия состоит в том, чтобы с помощью дополнительного построения получить подобные треугольники и затем использовать подобие для доказательства некоторого утверждения или нахождения некоторой величины.

Если в теореме или задаче речь идёт об отношениях отрезков, то часто именно метод подобия оказывается удобным.

Пользуясь методом подобия, докажем несколько теорем, касающихся метрических соотношений в окружности.

СВОЙСТВО ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ХОРД

ТЕОРЕМА. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.

Доказательство. Пусть M — точка пересечения хорд AB и CD (рис. 3.24). Докажем, что

$$AM \cdot BM = CM \cdot DM.$$

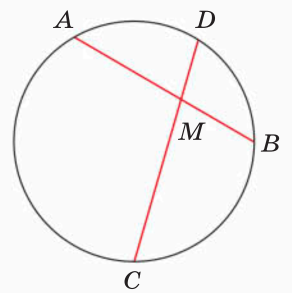


Рис. 3.24

Для доказательства выполним дополнительное построение: соединим концы хорд, проведя отрезки AC и BD (рис. 3.25).

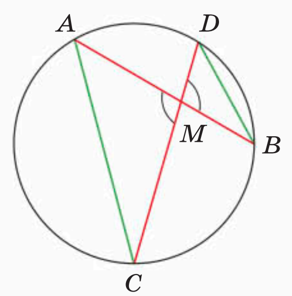


Рис. 3.25

Рассмотрим треугольники ACM и BMD.

В этих треугольниках $\angle ACD = \angle ABD$ как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу AD. $\angle AMC = \angle BMD$ как вертикальные.

Следовательно, $\triangle ACM \sim \triangle DBM$ по первому признаку подобия треугольников.

Отсюда $\frac{AM}{DM} = \frac{CM}{BM}$ или $AM \cdot BM = CM \cdot DM$. ▼

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНОЙ И СЕКУЩЕЙ, ПРОВЕДЁННЫХ ИЗ ОДНОЙ ТОЧКИ

ТЕОРЕМА. Если через точку A проведены к окружности касательная AB, где B — точка касания, и секущая, пересекающая окружность в точках C и M, то

$$AB^2 = AM \cdot AC.$$

Доказательство. На рисунке 3.26: AB — касательная, AC — секущая. Проведём отрезки BC и BM (рис. 3.27). Рассмотрим треугольники ABC и AMB.

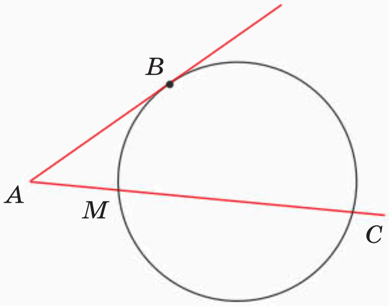


Рис. 3.26

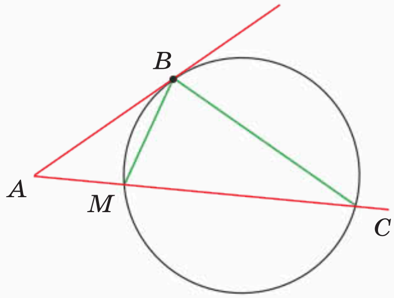


Рис. 3.27

$\angle A$ — общий угол. $\angle ABM = \frac{1}{2} \smile BM$ как угол между касательной и хордой, проведёнными из одной точки, $\angle BCM = \frac{1}{2} \smile BM$ как вписанный угол. Значит, $\angle ABM = \angle BCM$. Тогда $\triangle ABC \backsim \triangle ABM$ по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AB}$ или $AB^2 = AM \cdot AC$. ▼

Кратко эту теорему формулируют так: **квадрат касательной равен произведению секущей на её внешнюю часть.**

Птолемей Клавдий (ок. 100 – ок. 178 г.) Древнегреческий астроном и математик. Разработал математическую теорию планет, позволяющую вычислять их положение. Автор геоцентрической модели мира. Создатель прообраза современной системы координат. Его главный труд «Альмагест» более 1000 лет был основой астрономических исследований.

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

ТЕОРЕМА. Произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений его противолежащих сторон.

Доказательство. На рисунке *3.28* четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажем, что

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC.$$

Отметим на диагонали AC точку M такую, что $\angle 2 = \angle 1$, и проведём отрезок BM.

Рассмотрим треугольники ABM и DCB. В этих треугольниках $\angle 2 = \angle 1$, а $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC. Следовательно, $\triangle ABM \backsim \triangle DBC$ по первому признаку подобия. Отсюда

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AM}{CD}, \text{ а значит, } AB \cdot CD = BD \cdot AM. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь треугольники MBC и ABD. В этих треугольниках $\angle 5 = \angle 6$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AB. Так как $\angle 2 = \angle 1$, то и $\angle ABD = \angle MBC$. Следовательно, $\triangle MBC \backsim \triangle ABD$ по первому признаку подобия. Отсюда

$$\frac{BC}{BD} = \frac{MC}{AD}, \text{ а значит, } BC \cdot AD = BD \cdot MC. \qquad (2)$$

Сложив равенства (1) и (2), получим:

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AM + BD \cdot MC;$$
$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD\,(AM + MC),$$

то есть

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD \cdot AC. \text{ ▼}$$

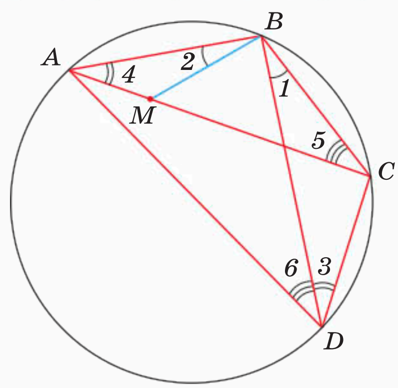


Рис. 3.28

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- В чём состоит метод подобия?
- Каким свойством обладают пересекающиеся хорды окружности? Докажите это свойство друг другу.
- Сформулируйте и докажите друг другу теорему об отрезках касательной и секущей.
- Сформулируйте и докажите друг другу теорему Птолемея.

3.5 Свойство биссектрисы треугольника

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Каким свойством обладает биссектриса угла треугольника

Метод подобия поможет доказать теорему о свойстве биссектрисы треугольника.

Свойство биссектрисы треугольника

Теорема. **Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.**

Доказательство. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC.

Докажем, что $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Проведём через точку C прямую, параллельную AB (рис. 3.29), и обозначим через M точку пересечения этой прямой с лучом BD.

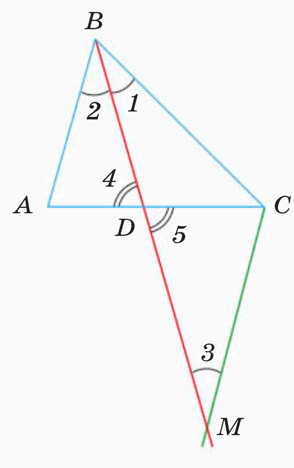


Рис. 3.29

Тогда $\angle 3 = \angle 2$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AB и CM и секущей BM, но $\angle 2 = \angle 1$, тогда и $\angle 3 = \angle 1$, значит, треугольник MBC — равнобедренный и $BC = MC$.

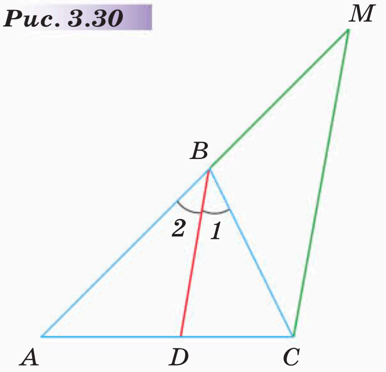
В треугольниках ABD и CMD $\angle 3 = \angle 2$ по построению, $\angle 4 = \angle 5$ как вертикальные, следовательно, $\triangle ABD \sim \triangle CMD$.

Отсюда $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{MC}$, но $MC = BC$, тогда

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}. \text{ Отсюда } \frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}. \blacktriangledown$$

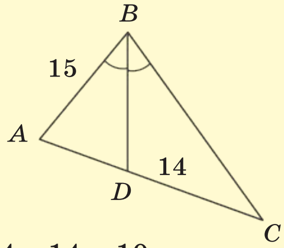
Замечание. Для доказательства теоремы можно было сделать и другое дополнительное построение, а именно: через точку C провести прямую, параллельную биссектрисе BD, до пересечения с продолжением стороны AB (рис. 3.30).

Рис. 3.30



Проведите самостоятельно доказательство теоремы, используя рисунок 3.30.

Задача 1. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. $AB = 15$, $AC = 24$, $DC = 14$. Найдите периметр треугольника ABC.

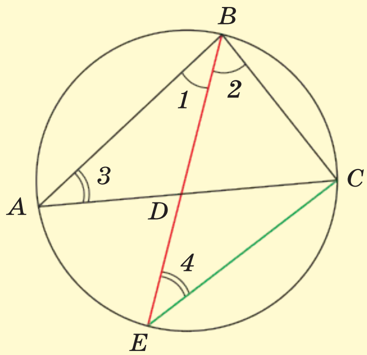


Решение.
Найдём AD. $AD = AC - DC = 24 - 14 = 10$.
Найдём BC. Так как BD – биссектриса, то $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$, то есть $\frac{10}{14} = \frac{15}{BC}$. Отсюда $BC = \frac{14 \cdot 15}{10} = 21$.

$P_{ABC} = AB + BC + AC = 15 + 21 + 24 = 60$.

Ответ: 60.

Задача 2. Докажите, что если BD — биссектриса треугольника ABC, то $BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC$.
Решение. Опишем около треугольника ABC окружность и продолжим биссектрису угла B до пересечения с окружностью. Получим точку E. Соединим E и C.



По свойству пересекающихся хорд имеем:

$$AD \cdot DC = BD \cdot DE. \qquad (1)$$

В треугольниках ABD и EBC $\angle 3 = \angle 4$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC. BD — биссектриса угла ABC, значит, $\angle 1 = \angle 2$. Тогда $\triangle ABD \sim \triangle EBC$ по первому признаку подобия. Отсюда

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC}, \text{ значит, } AB \cdot BC = BE \cdot BD. \qquad (2)$$

Вычтем почленно из второго равенства первое:

$$AB \cdot BC - AD \cdot DC = BE \cdot BD - BD \cdot DE;$$
$$AB \cdot BC - AD \cdot DC = BD \cdot (BE - DE);$$
$$AB \cdot BC - AD \cdot DC = BD \cdot BD, \text{ то есть}$$
$$BD^2 = AB \cdot BC - AD \cdot DC. \blacktriangledown$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Каким свойством обладает биссектриса угла треугольника? Докажите это свойство друг другу.
- Биссектриса треугольника делит сторону треугольника в отношении 1 : 2. Могут ли углы, прилежащие к этой стороне, быть равными? Ответ обоснуйте.

3.6 ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие точки называют замечательными точками треугольника
- Какую прямую называют прямой Эйлера

Точка пересечения биссектрис треугольника и точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника относятся к замечательным точкам треугольника. Какие же ещё замечательные точки есть в треугольнике?

ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МЕДИАН ТРЕУГОЛЬНИКА

Теорема. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Доказательство. В произвольном треугольнике ABC проведём медианы AM и CN и обозначим через O точку их пересечения (рис. 3.31).

Докажем, что $AO : OM = CO : ON = 2 : 1$.

Точки N и M — середины сторон AB и BC треугольника ABC, значит, MN — средняя линия треугольника ABC, поэтому $MN \parallel AC$.

Тогда $\angle 1 = \angle 2$ как накрест лежащие углы, образованные параллельными прямыми AC и MN и секущей AM.

В треугольниках AOC и MON: $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, значит, $\triangle AOC \sim \triangle MOC$ по двум углам.

Следовательно,

$$\frac{AO}{OM} = \frac{OC}{ON} = \frac{AC}{MN} = \frac{2}{1},$$

то есть $AO : OM = OC : ON = 2 : 1$.

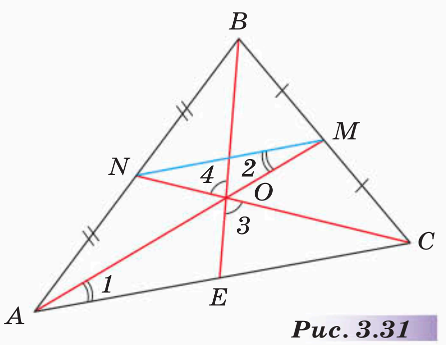


Рис. 3.31

Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан AM и BE делит каждую из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины, а значит, совпадает с точкой O.

Таким образом, все три медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершины. ▼

Точку пересечения медиан треугольника называют **центроидом треугольника** (центром масс треугольника).

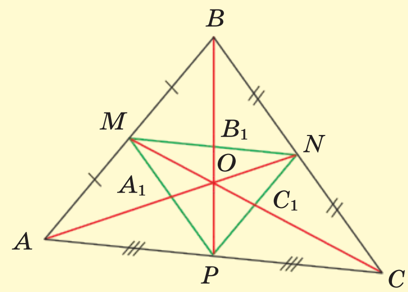
В справедливости такого названия можно убедиться, проведя следующий эксперимент.

Вырежите из плотного картона или пластика произвольный треугольник. Проведя медианы, определите центроид и попытайтесь удержать треугольник в равновесии, положив его на острие карандаша или спицы в центроиде.

Точка пересечения медиан треугольника является одной из замечательных точек треугольника.

Задача.
В треугольнике проведены средние линии. Докажите, что точка пересечения медиан полученного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника.

Решение.
Пусть точки M, N и P — середины сторон треугольника ABC.
A_1, B_1, C_1 — точки пересечения медиан треугольника ABC с соответствующими сторонами треугольника MNP.
Четырёхугольник $AMNP$ — параллелограмм, значит, $MA_1 = A_1P$ по свойству диагоналей параллелограмма. Тогда NA_1 — медиана треугольника MNP.
Аналогично доказывается, что PB_1 и MC_1 — медианы треугольника MNP.
Таким образом, точка пересечения медиан треугольника MNP совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника ABC.



ТОЧКА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ВЫСОТ ТРЕУГОЛЬНИКА Рассмотрим ещё одну замечательную точку треугольника.

ТЕОРЕМА. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.

Доказательство. Проведём доказательство для остроугольного треугольника.

Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты треугольника ABC.

Докажем, что AA_1, BB_1, и CC_1 пересекаются в одной точке.

Проведём через вершины треугольника ABC прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника (рис. 3.32).

Эти прямые образуют новый треугольник MNP.

По построению четырёхугольники $AMBC$ и $ABNC$ — параллелограммы.

Следовательно, $MB = AC$ и $BN = AC$.

Значит, $MB = BN$, то есть точка B — середина отрезка MN.

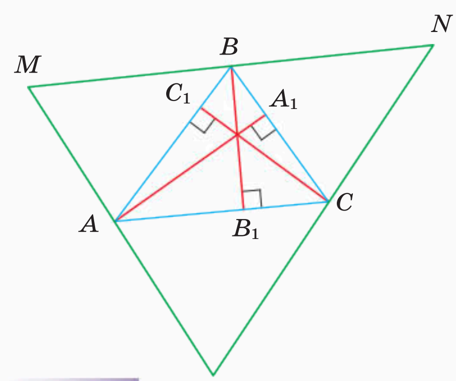


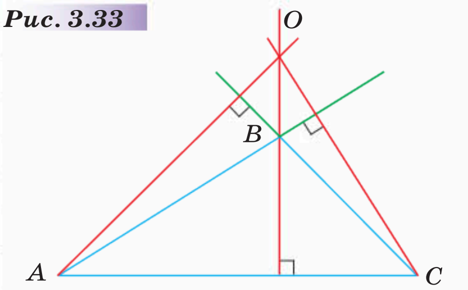
Рис. 3.32

Аналогично доказывается, что точка C — середина отрезка PN и точка A — середина MP.

Отсюда следует, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника MNP, значит, они пересекаются в одной точке. ▼

Очевидно, что высоты прямоугольного треугольника пересекаются в вершине прямого угла.

Рис. 3.33



В тупоугольном треугольнике в одной точке пересекаются не высоты, а их продолжения, и эта точка находится за пределами треугольника (рис. *3.33*).

Доказательство этого случая теоремы аналогично доказательству в случае остроугольного треугольника.

Точку пересечения высот треугольника или их продолжений называют **ортоцентром** треугольника.

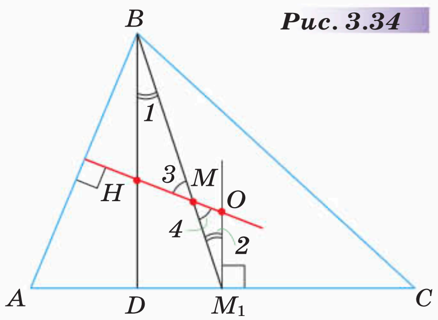
Итак, к числу замечательных точек в треугольнике относятся:

— **точка пересечения биссектрис;**
— **точка пересечения серединных перпендикуляров;**
— **точка пересечения медиан;**
— **точка пересечения высот или их продолжений.**

Замечательными эти точки называют за множество интересных свойств, которыми они обладают.

Рассмотрим одно из них.

Рис. 3.34



Теорема*. **Центроид, ортоцентр и центр описанной около треугольника окружности лежат на одной прямой.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, в котором точки H — ортоцентр треугольника, O — центр описанной около треугольника окружности.

Обозначим через M точку пересечения медианы BM_1 и прямой HO (рис. *3.34*) и докажем, что точка M является центроидом треугольника ABC.

Отрезки BD и OM_1 являются перпендикулярами к стороне AC, следовательно, $BD \parallel OM_1$. Отсюда следует равенство углов: $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, тогда $\triangle HBM \sim \triangle OM_1M$ по двум углам. Следовательно, $\dfrac{BM}{MM_1} = \dfrac{BH}{OM_1}$.

Найдём теперь коэффициент подобия.

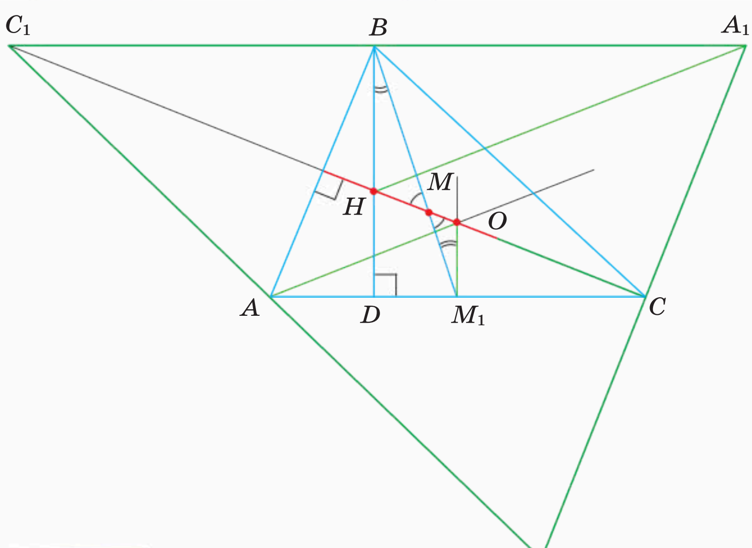


Рис. 3.35

Для этого выполним дополнительное построение: через вершины треугольника проведём прямые, параллельные сторонам треугольника ABC. Они образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Проведём отрезки HC_1, HA_1, OA и OC (рис. *3.35*).

Как было показано в доказательстве предыдущей теоремы, точка H является точкой пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника $A_1B_1C_1$, то есть является центром описанной около треугольника $A_1B_1C_1$ окружности.

Тогда $\angle A_1HC_1 = 2\angle A_1B_1C_1$ как центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Тогда $\angle AOC = 2\angle ABC$ как центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности.

$\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ как противоположные углы параллелограмма $ABCD$.

Получаем: $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1HC_1$. Тогда равнобедренные треугольники A_1HC_1 и AOC подобны с коэффициентом подобия, равным $\frac{A_1C_1}{AC} = 2$ $(CA_1C_1 = 2AC)$.

Следовательно,

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

BH и OM_1 — соответственные высоты в подобных треугольниках, то есть

$$\frac{BH}{OM_1} = \frac{2}{1}.$$

По доказанному выше

$$\frac{BM}{HM_1} = \frac{BH}{OM_1} = \frac{2}{1},$$

то есть точка M делит медиану BM_1 в отношении $2:1$, считая от вершины. Тогда точка M — центроид треугольника ABC. ▼

Таким образом, мы доказали, что центроид, ортоцентр и центр описанной около треугольника окружности лежат на одной прямой.

Эту прямую назвали **прямой Эйлера** в честь выдающегося ученого XVIII в. Леонарда Эйлера, впервые установившего этот факт.

С именем Леонарда Эйлера связана ещё одна теорема о замечательных точках треугольника.

Теорема*. **В треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами треугольника, лежат на одной окружности, центром которой является середина отрезка, соединяющего ортоцентр с центром описанной окружности, а её радиус в 3 раза меньше радиуса описанной окружности.**

Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон, H — ортоцентр, A_2, B_2, C_2 — основания высот, опущенных из соответствующих вершин, A_3, B_3, C_3 — середины отрезков AH, BH и CH соответственно (рис. 3.36).

Тогда точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 лежат на одной окружности.

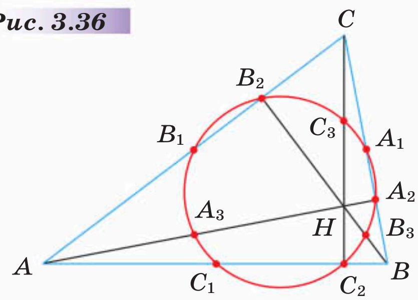
Доказательство этой теоремы здесь мы опускаем, но вы можете рассмотреть его в тетради-тренажёре.

Такую окружность называют **окружностью Эйлера** или **окружностью девяти точек**.

Заметим, что центр этой окружности тоже лежит на прямой Эйлера.

Леонард Эйлер (1707–1783) – величайший математик, механик, внёсший фундаментальный вклад в развитие этих наук. Академик многих мировых академий наук, долгие годы работал в Санкт-Петербурге. Серьёзно занимался также медициной, биологией, химией, теорией музыки.

Рис. 3.36



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие точки называют замечательными точками треугольника?
- Сформулируйте и докажите теорему о точке пересечения медиан треугольника.
- Какую точку называют центроидом треугольника?
- Сформулируйте и докажите теорему о пересечении высот треугольника.
- Какую точку называют ортоцентром треугольника?
- Какую прямую называют прямой Эйлера?

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 3.1

К **1** Выполните необходимые измерения и найдите отношение стороны a к стороне b прямоугольника (рис. *1*). Что показывает отношение?

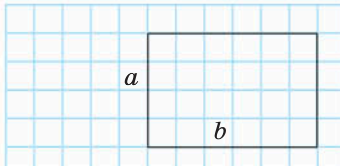


Рис. 1

К **2** а) Отрезок длиной 18 см разделён на два отрезка в отношении 4 : 5. Вычислите длины этих отрезков.
б) Отрезок длиной 35 см разделён на два отрезка так, что длина одного из них равна 10 см. В каком отношении разделён отрезок?

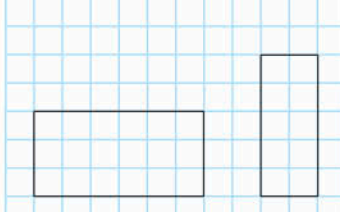


Рис. 2

К **3** а) На рисунке *2* изображены два прямоугольника. Пропорциональны ли стороны прямоугольников, изображённых на рисунке *2*?
б) Пропорциональны ли отрезки, если отношение двух из них 2,5 : 1,5, а отношение двух других 72 : 45?

Рис. 3

Т **4** По данным рисунка *3* найдите $\frac{DE}{AD}$; $\frac{AE}{BC}$; $\frac{BE}{AD}$.

5 а) Прямая MN параллельна стороне AC треугольника ABC (рис. *4*). Найдите отрезок AB, если $AM = 24$ см, $BN : NC = 3 : 4$.
б) Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает стороны AC и BC в точках M и N соответственно. $AM = 18$, $MC = 8$, $NC = 12$. Найдите отрезок BN.
в) На рисунке *4*: $MN \parallel AC$, $AM = 8$. Отрезок BN в два раза меньше отрезка NC. Найдите отрезок AB.

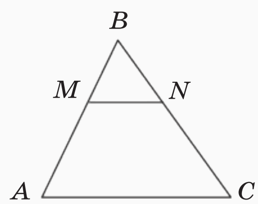


Рис. 4

К **6** а) Прямоугольная рамка для фотографии представляет собой золотой прямоугольник, длина большей стороны которого равна 20 см. Найдите длину меньшей стороны.
б) Рама для картины выполнена в форме золотого прямоугольника. Высота рамы равна 40 см. Чему равна ширина рамы?

К **7** а) Расстояние между двумя пунктами на карте равно 4,5 см. Найдите масштаб карты и расстояние между этими пунктами на местности, если расстоянию 10 см на этой карте соответствует 5 км на местности.
б) Расстояние между двумя пунктами на местности равно 15 км. Найдите масштаб карты и расстояние между пунктами на карте, если расстоянию 3 см на этой карте соответствует 6 км на местности.

К Т **8** Начертите три отрезка a, b и c. Постройте отрезок x такой, что $a : b = x : c$.

К Т **9** Начертите угол A. Во внутренней области угла отметьте точку M. Проведите через точку M отрезок, концы которого принадлежат сторонам угла и который делится точкой M в отношении 2 : 3.

ПОВТОРЯЕМ

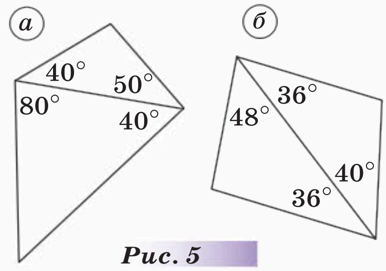


Рис. 5

1. Найдите на рисунке 5 параллельные стороны у четырёхугольников.
2. Периметр четырёхугольника $ABCD$ равен 7,2 см. Длины его сторон пропорциональны числам 3, 4, 5 и 6. Найдите длины всех сторон четырёхугольника.
3. Углы треугольника пропорциональны числам 2, 3, 5. Определите вид треугольника.
4. Могут ли стороны треугольника быть пропорциональны числам 2, 3 и 5?

П. 3.2

Т **10** Треугольники ABC и MNO подобны. Укажите соответственные стороны, если известно, что: а) $\angle A = \angle N$, $\angle B = \angle O$; б) $\angle A = \angle O$, $\angle C = \angle N$.

К Т **11** Треугольники ABC и MNO подобны. Укажите равные углы, если известно, что: а) $\frac{AB}{NO} = \frac{BC}{MN} = \frac{AC}{MO}$; б) $\frac{MN}{AB} = \frac{MO}{BC} = \frac{NO}{AC}$.

К **12** Два треугольника подобны. Коэффициент подобия равен 0,25. Во сколько раз стороны одного треугольника больше соответственных сторон другого треугольника?

13 Стороны треугольника относятся как $5:3:7$. Найдите стороны подобного ему треугольника, у которого: а) периметр равен 30 см; б) меньшая сторона равна 6 см; в) бóльшая сторона равна 14 см; г) разность большей и меньшей сторон составляет 4 см.

14 Стороны треугольника равны 3, 5 и 7 см. Найдите периметр треугольника, подобного данному, если: а) его наибольшая сторона равна 21 см; б) его наименьшая сторона равна 12 см.

15 Стороны треугольника равны 5, 8 и 10. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если: а) его периметр равен 11,5; б) его бóльшая сторона равна меньшей стороне данного треугольника.

16 Треугольники ABC и MEO подобны, причём $\frac{AC}{MO} = \frac{BC}{EO}$. Найдите: а) угол A, если $\angle M = 35°$; б) угол O, если $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$.

17 Треугольники ABC и EMD подобны. Стороны AB, BC и CA треугольника ABC пропорциональны соответственно сторонам EM, MD и DE треугольника EMD. а) $\angle C = 50°$ и $\angle M = 60°$. Найдите остальные углы треугольников. б) $\angle C + \angle E = 110°$. Найдите угол B.

Т **18** а) Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника, подобен данному треугольнику.
б) Докажите, что любые два равносторонних треугольника подобны.

19 а) Диагональ AC, равная 6 см, разделяет трапецию $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 4$ см и $CD = 6$ см на два подобных треугольника. Найдите периметр трапеции.
б) Диагональ AC разделяет трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 3$ на два подобных треугольника. Найдите AC.

К **20** а) На рисунке 6 изображены треугольник ABC и вписанный в него ромб $ADEM$. Найдите сторону ромба, если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см.

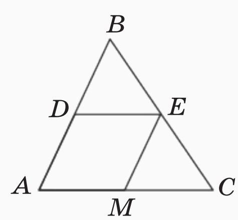


Рис. 6

б) На рисунке 7 изображены прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90°$) и вписанный в него квадрат $CMKN$. Найдите BN, если $CM = 12$ см, $AC = 27$ см.

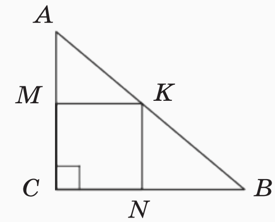


Рис. 7

К 21 Каждый из двух неравных, но подобных треугольников имеет стороны 9 см и 6 см. Найдите неизвестные стороны треугольников.

Т 22 а) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите меньшее основание трапеции, если большее основание AD равно 24 см, $CD = 12$ см, $CM = 18$ см.
б) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите CM, если $DM = 35$ см, $BC : AD = 3 : 5$.

Т 23 В равнобедренный треугольник с основанием 6 см и боковой стороной 9 см вписана окружность. Найдите расстояние между точками касания этой окружности с боковыми сторонами треугольника.

ПОВТОРЯЕМ

1. В равнобедренном треугольнике ABC известно, что $AB = 8$ см, $\angle ABC = 120°$, BD — биссектриса. Найдите длину отрезка BD.
2. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка M, причём $\angle ACM + \angle AMC = 120°$, $\angle B = 30°$. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.
3. Во внутренней области угла ABC, равного 60°, отмечена точка M так, что $\angle BAM = 100°$, $\angle BCM = 80°$. Найдите угол AMC.
4. Докажите, что отрезок, соединяющий точку основания равнобедренного треугольника с противоположной вершиной, не больше боковой стороны.

П. 3.3

К 24 а) Будут ли подобны два равнобедренных треугольника, если у одного из них есть угол 112°, а у другого — угол 34°?
б) Будут ли подобны два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол 55°, а у другого — 35°?
в) Будут ли подобны два треугольника, если у одного из них два угла равны 100° и 30°, а у другого — 30° и 50°?

Т 25 Докажите, что треугольники, изображённые на рисунке 8, *а* — *д*, подобны. Укажите все подобные треугольники. В каждом случае запишите пропорциональность их сторон.

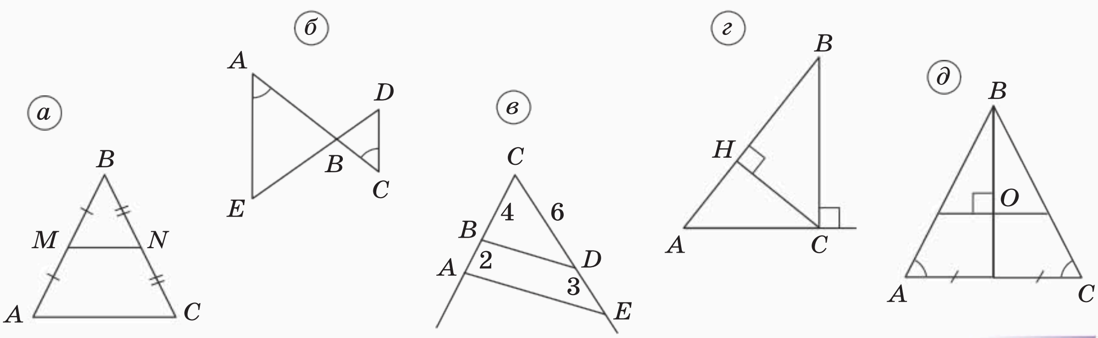


Рис. 8

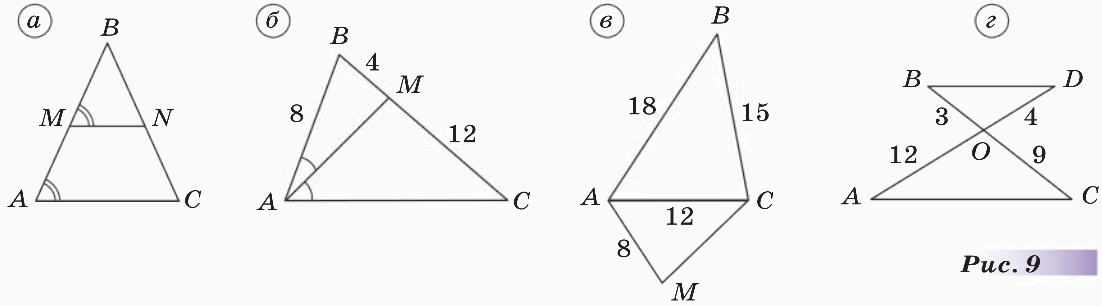


Рис. 9

26 Подобны ли треугольники со сторонами:
а) 7, 9, 10 и 21, 27, 33; б) 4, 5, 8 и 24, 15, 12?

27 На рисунке *9* укажите подобные треугольники и объясниите, почему они подобны. Во всех случаях найдите длину отрезка AC.

28 Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) пересекаются в точке O.
а) Докажите, что $\triangle AOD \sim \triangle COB$.
б) В каком отношении точка O делит каждую диагональ, если AD — 51, $BC = 34$?
в) Найдите AB, если $CD = 50$, $BO = 8$, $DO = 20$.
г) Найдите AO, если $OC = 12$ и периметры треугольников OAD и OBC относятся как 3 : 5.

29 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

1. Будут ли равнобедренные треугольники подобны, если:
а) они имеют по равному углу, противоположному основанию треугольников?
б) они имеют по равному углу при основании треугольников?
в) они имеют по равному тупому углу?
г) они имеют по равному острому углу?
2. Будут ли подобны прямоугольные треугольники, если они имеют по равному острому углу?

30 Сформулируйте признаки подобия:
а) равнобедренных треугольников;
б) прямоугольных треугольников.

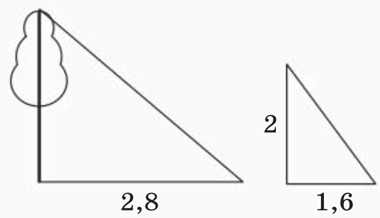


Рис. 10

Т 31 а) Изображение дома, удалённого на 50 м от объектива фотоаппарата, имеет на его дисплее высоту 10 мм. Расстояние от объектива до изображения равно 50 м. Какова высота дома?
б) Найдите высоту дерева, если длина его тени равна 2,8 м, а длина тени от вертикального столба высотой 2 м равна 6,1 м (рис. *10*).

Т 32 На рисунке *11* изображён колодец с «журавлём». Короткое плечо имеет 2 м в длину, а длинное плечо — 8 м.
а) На сколько метров опустится конец длинного плеча, если конец короткого плеча поднялся на 1,5 м?
б) На сколько метров опустится конец короткого плеча, если конец длинного плеча поднимется на 4 м?

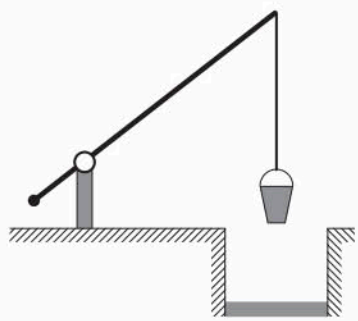


Рис. 11

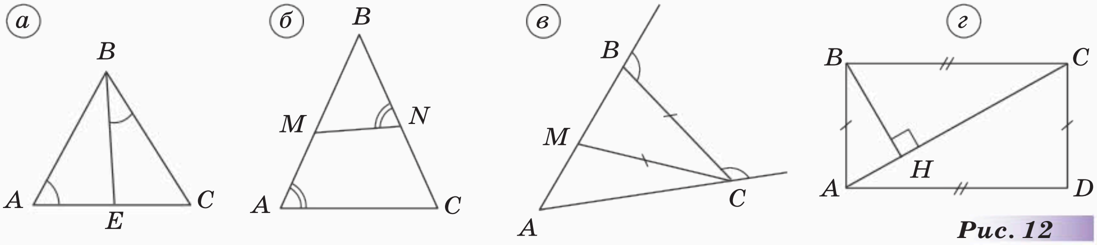


Рис. 12

33 На рисунке *12* укажите подобные треугольники, докажите их подобие и запишите пропорциональность сторон треугольников.

Т **34** Докажите, что в подобных треугольниках коэффициенту подобия равно: а) отношение соответственных медиан; б) отношение соответственных биссектрис; в) отношение соответственных высот.

К Т **35** Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника, подобных исходному.

Т **36** В треугольнике ABC с острым углом C проведены высоты AH и BD. Докажите, что треугольники ABC и HDC подобны.

37 В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны соответственно 4 см и 16 см, $BD = 8$ см. Докажите, что $\triangle BCD \sim \triangle ABD$.

38 В треугольнике ABC проведена медиана BH. Из точки H к прямым AB и CB проведены перпендикуляры, основания которых соответственно точки M и N. Докажите, что треугольники NBM и ABC подобны.

39 а) Продолжения сторон четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке M. Известно, что около этого четырёхугольника можно описать окружность. Докажите, что треугольники AMD и BCM подобны.
б) Продолжения сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Известно, что $CD = 4$, $CM = 3$, разность оснований равна 4. Найдите основания трапеции.

40 В параллелограмме $ABCD$ отрезки AM и AN — перпендикуляры, проведённые к прямым BC и CD соответственно. Докажите, что треугольники ABC и MAN подобны.

К **41** В треугольник со стороной a и высотой h, опущенной на неё, вписан квадрат так, что две его вершины лежат на этой стороне треугольника, а другие две — на двух других сторонах треугольника. Найдите сторону квадрата.

К **42** Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям, концы которого лежат на боковых сторонах, если он проходит:
а) через точку пересечения диагоналей трапеции;
б) через точку, делящую боковую сторону в отношении $m : n$, считая от большего основания.

43 На рисунке *13* показано, как можно найти ширину реки, используя свойства подобия треугольников — ABC и DEC. Опишите этот способ и найдите ширину реки, если известно, что $BC = 40$ м, $EC = 15$ м и $DC = 12$ м.

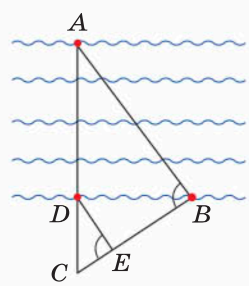


Рис. 13

ПОВТОРЯЕМ

1. Найдите неизвестную сторону равнобедренного треугольника, если две другие стороны равны 8 см и 3 см.
2. Докажите, что медиана AM треугольника ABC меньше полусуммы сторон AB и AC.

3. Диаметр AC окружности пересекает хорду BM в её середине. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle AMC$.
4. На рисунке *14*: $AD = DC$, $AO = OC$. Докажите, что: а) $\angle ACN = \angle CAM$; б) $BM = BN$.

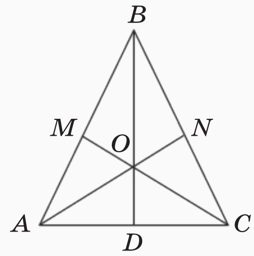


Рис. 14

П. 3.4

Т **44** а) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. $AE = 3$, $BE = 5$, $CE = 6$. Найдите отрезок DE.
б) Хорды AB и DC пересекаются в точке M. Точка M делит хорду AB окружности на отрезки длиной 4 см и 16 см, $DM = MC$. Найдите отрезок DC.

45 а) Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке E. Известно, что $AB = 32$ см, $AM = 8$ см, $CM : MD = 3 : 4$. Найдите CD.
б) Хорды MN и DE окружности пересекаются в точке A. $MA = 9$, $NA = 12$, отрезок EA в 2 раза короче отрезка AD. Найдите хорду DE.

46 а) В окружности с центром O проведена хорда AB, на которой взята точка C так, что $AC = 15$, а $BC = OC = 5$. Чему равен радиус окружности?
б) Диаметр AB окружности делит хорду MN в точке C на отрезки длиной 3 см и 4 см. Точка C делит диаметр AB в отношении $1 : 3$. Найдите радиус окружности.

К **47** К окружности из точки A, лежащей вне окружности, проведены касательная AE (E — точка касания) и секущая, пересекающая окружность в точках B и C (точка B лежит между точками A и C).
а) Найдите отрезок AC, если $AE = 24$ см, $AB : BC = 3 : 5$;
б) найдите хорду BC, если $AE = 8$, $AC = 20$.

К **48** Из точки M, расположенной вне окружности и удалённой от её центра на 13 см, проведена касательная. Найдите радиус окружности, если отрезок касательной от точки M до точки касания равен 12 см.

К **49** Из точки M окружности проведён перпендикуляр MD к диаметру AB. Докажите, что $MD^2 = AD \cdot BD$.

К **50** а) Из точки M к окружности проведены отрезок касательной MN и секущая, пересекающая окружность в точках A и B. Известно, что биссектриса угла NMB пересекает хорды NA и NB в точках C и D. Докажите, что $NC = ND$.
б) Из точки E к окружности проведены отрезок касательной EA и секущая, пересекающая окружность в точках B и C. Биссектриса угла BEA пересекает хорды AB и AC в точках M и N. Докажите, что $AM^2 = MB \cdot NC$.

К **51** Радиус земли 6370 км.
а) Как далеко видно из иллюминатора самолёта, летящего на высоте 10 км над землёй?
б) Высота Останкинской телебашни 537 м. Вычислите радиус горизонта, видимого с вершины телебашни.
При вычислениях используйте калькулятор.

Т **52** а) Используя данные рисунка *15*, докажите, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.
б) Найдите AC (рис. *15*), если $AD = 6$, $DE = 4$, $BC : AD = 8 : 3$.

53 В треугольнике ABC угол B — тупой. Постройте на стороне AC такую точку M, что $BC^2 = CM \cdot AC$.

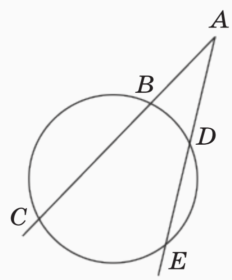


Рис. 15

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке *16*: $\angle BEA = \angle BDC$, $AE = DC$, $AM = MB$; $CN = NB$. Докажите, что:
а) $\triangle ABE = \triangle BDC$;
б) $\triangle ABD = \triangle CBE$;
в) $DM = EN$.

2. Используя данные рисунка *17*, найдите угол *1*.

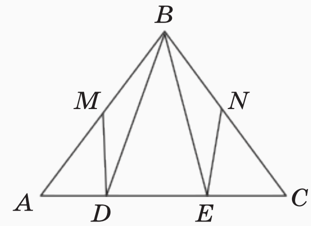


Рис. 16

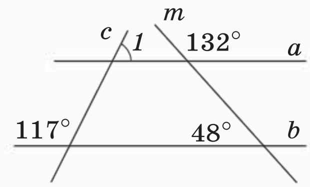


Рис. 17

П. 3.5

54 Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Найдите сторону AB, если:
а) $BC = 8$, $DC = 6$, $AD = 9$;
б) $AD = 16$, $DC = 9$, $BC = 24$.

Т **55** Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC, $AB = 14$ см, $BC = 10$ см, $AC = 18$ см. Найдите отрезки AD и CD.

56 а) Биссектриса равнобедренного треугольника делит боковую сторону на отрезки длиной 7 см и 14 см, считая от основания треугольника. Найдите основание треугольника.
б) Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC. Найдите стороны треугольника, если $AD = 8$ см, $DC = 12$ см, а периметр треугольника равен 90 см.

57 а) Биссектриса прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки, разность которых составляет 8 см. Найдите гипотенузу треугольника, если отношение катетов равно 3 : 2.
б) Биссектриса прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) делит его катет BC на отрезки длиной 5 см и 4 см, считая от вершины B. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB = 15$ см.

58 Из точки D к окружности проведены отрезок касательной DA и секущая, пересекающая окружность в точках B и C. Известно, что биссектриса угла ADB пересекает хорды AB и AC в точках M и N. Докажите, что $AM = AN$.

К **59** Постройте треугольник: а) по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла; б) по углу, биссектрисе этого угла и отношению сторон, которые образуют данный угол.

ПОВТОРЯЕМ

1. В прямоугольном треугольнике ABC: $AC = BC$, $AB = 12$. Каково взаимное расположение прямой AB и окружности с центром в точке C и радиусом, равным 6?
2. Точки M и N лежат на касательной к окружности с центром в точке O. Известно, что $OM = ON$, $MN = 16$, $ON \perp OM$. Найдите радиус окружности.

П. 3.6

К Т **60** Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам для: а) прямоугольного треугольника; б) остроугольного треугольника; в) тупоугольного треугольника?

К **61** Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой?

К 62 а) К какой из сторон треугольника ближе расположен центр описанной окружности?
б) К какой из вершин треугольника ближе расположен центр вписанной окружности?

К 63 а) Докажите, что в равнобедренном треугольнике все четыре замечательные точки лежат на одной прямой. Какая это прямая?
б) В треугольнике точка пересечения медиан совпадает с ортоцентром. Докажите, что данный треугольник равносторонний.

К 64 Медианы AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, в котором угол B равен $120°$, а боковая сторона равна 12 см, пересекаются в точке O. Найдите BO.

К Т 65 а) Точка H — ортоцентр треугольника ABC, в котором $AB = BC$ и $\angle B = 80°$. Найдите угол ACH.
б) Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC. Докажите, что $\angle ABH = \angle ACH$.

К Т 66 а) Биссектрисы равностороннего треугольника пересекаются в точке O и равны 9 см. На каком расстоянии от сторон находится точка пересечения высот треугольника?
б) Медиана BM треугольника ABC равна 12, O — точка пересечения медиан треугольника. Найдите отрезки BO и OM.

К 67 а) Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что четырёхугольник, вершинами которого являются точки пересечения медиан треугольников ABC, BCD, CDA и DAB, — параллелограмм.
б) Дан параллелограмм $ABCD$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и CDA лежат на диагонали BD и делят её на три равные части.

К 68 Расстояние от центра окружности, описанной около равнобедренного треугольника, до его основания равно 3 см, а радиус этой окружности равен 6 см. Найдите длины отрезков, на которые точка пересечения медиан делит медиану, проведённую к основанию.

К 1 а) Найдите бóльшую сторону «золотого» прямоугольника, если меньшая сторона равна 1.
б) Расположите прямоугольник так, чтобы его бóльшая сторона была горизонтальной. Отрежьте от него квадрат с правой стороны. От оставшегося прямоугольника отрежьте квадрат сверху, затем слева, снизу и т. д. по спирали. Покажите, что существует точка M внутри исходного прямоугольника, которая не попадает ни в один из отрезанных квадратов. Найдите расстояние от M до левой и нижней сторон исходного прямоугольника.

2 Диагональ трапеции делит её на два подобных между собой треугольника. Отношение боковых сторон трапеции равно 2. Найдите отношение оснований трапеции.

3 Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на две подобные между собой трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

4 Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения её диагоналей. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

К **5** Через одну точку плоскости проведены три прямые, разбивающие плоскость на 6 углов. Известно, что средний по величине угол равен среднему арифметическому наибольшего и наименьшего из образовавшихся углов. Найдите средний по величине угол.

К **6** Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$, $KC = 1$. Рассмотрите два возможных случая.

К **7** В вершинах A, B, C и D четырёхугольника $ABCD$ находятся центры четырёх окружностей. Любые две из этих окружностей, центры которых расположены в соседних вершинах, касаются друг друга внешним образом. Известно, что $BC = 3$, $CD = 5$. Найдите AD.

К **8** Постройте треугольник по трём медианам.

К **9** Докажите, что для любого треугольника существуют три попарно касающиеся друг друга окружности с центрами в вершинах треугольника ABC такие, что окружности с центрами B и C касаются друг друга внешним образом и обе они изнутри касаются окружности с центром A. При этом радиус окружности с центром A равен p, а окружности с центрами B и C имеют радиусы $p - c$ и $p - b$ соответственно, где p — полупериметр треугольника, $b = AC$, $c = AB$.

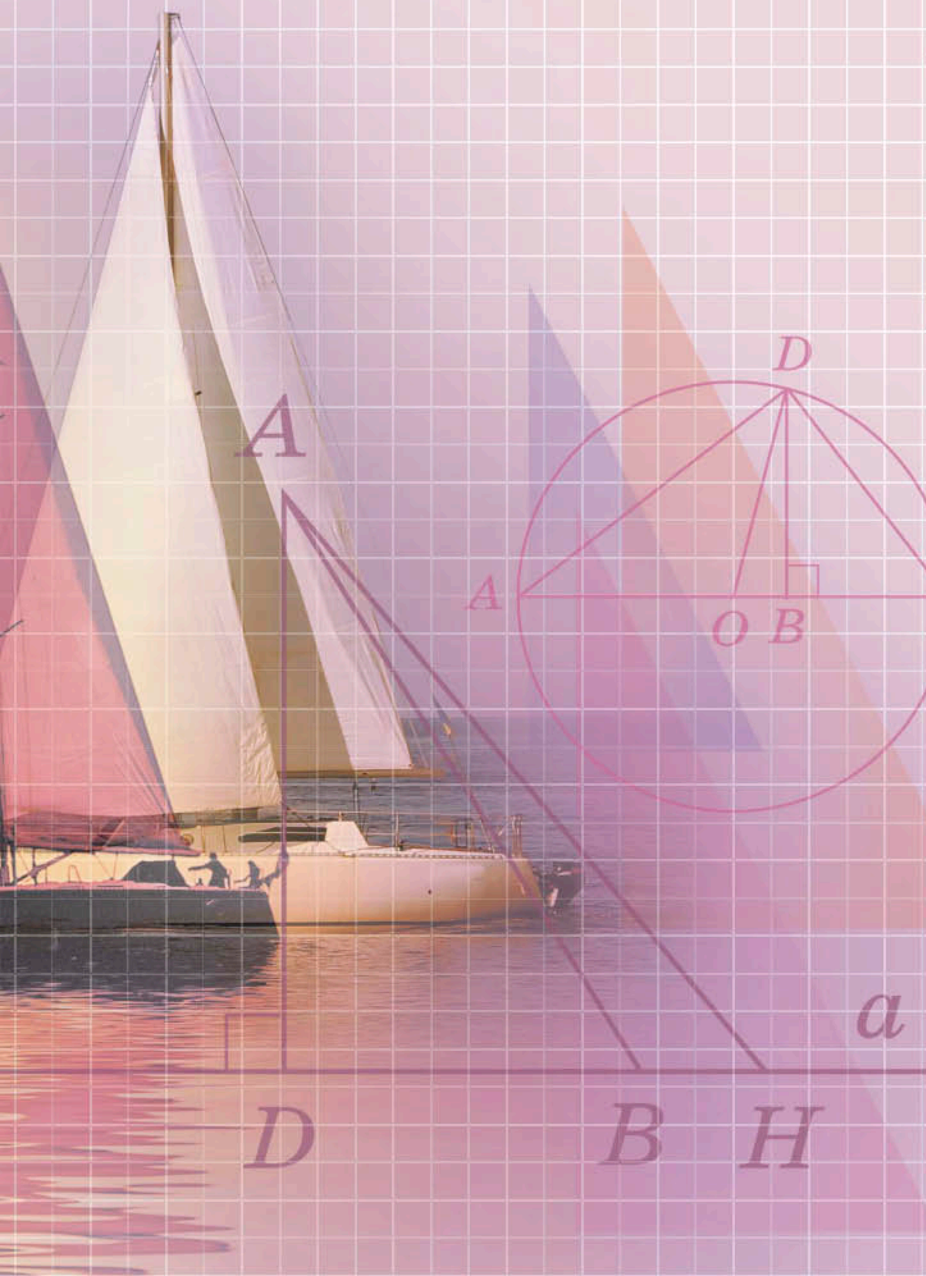
ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Какие треугольники называются подобными? Каким знаком обозначается подобие фигур? Как записывается подобие треугольников? Как найти коэффициент подобия двух подобных треугольников?
- Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум углам.
- Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними.
- Сформулируйте и докажите признак подобия треугольников по трём сторонам.
- Какую пропорцию называют золотым сечением?
- Сформулируйте и докажите свойство пересекающихся хорд окружности.
- Сформулируйте и докажите теорему о свойстве касательной и секущей, проведённых из одной точки.
- Сформулируйте и докажите теорему Птолемея.
- Каким свойством обладает биссектриса треугольника? Докажите его.
- Какие замечательные точки треугольника вы знаете?
- Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.
- Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
- Что называют центроидом треугольника? ортоцентром треугольника?

ГЛАВА 4

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

- МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ
- СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ДВУХ ОТРЕЗКОВ
- ТЕОРЕМА ПИФАГОРА
- СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ
- ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА
- РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



ИНТЕРЕСНО

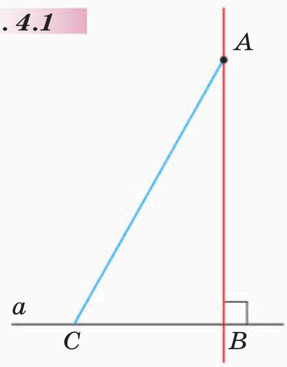
Знаменитый древнегреческий учёный Пифагор, именем которого названа важнейшая теорема геометрии, жил в IV в. до н. э. Историю жизни Пифагора трудно отделить от легенд, представляющих его в качестве совершенного мудреца и великого учёного, посвящённого во все таинства греков и варваров. По словам античных авторов, Пифагор встретился чуть ли не со всеми известными мудрецами той эпохи — греками, персами, халдеями, египтянами, впитал в себя всё накопленное человечеством знание, основал знаменитую пифагорейскую школу, оказавшую огромное влияние на развитие европейской науки. От пифагорейцев идёт и слово «математика», означающее «познание, учение». Математика у пифагорейцев состояла из квадриума, то есть четырёх разделов — арифметики, геометрии, музыки и астрономии. Кстати, квадриум вместе с тривиумом, включавшим грамматику, риторику и диалектику, составлял так называемые семь свободных искусств — свод знаний, составлявший на протяжении тысячелетия курс средневекового светского образования.

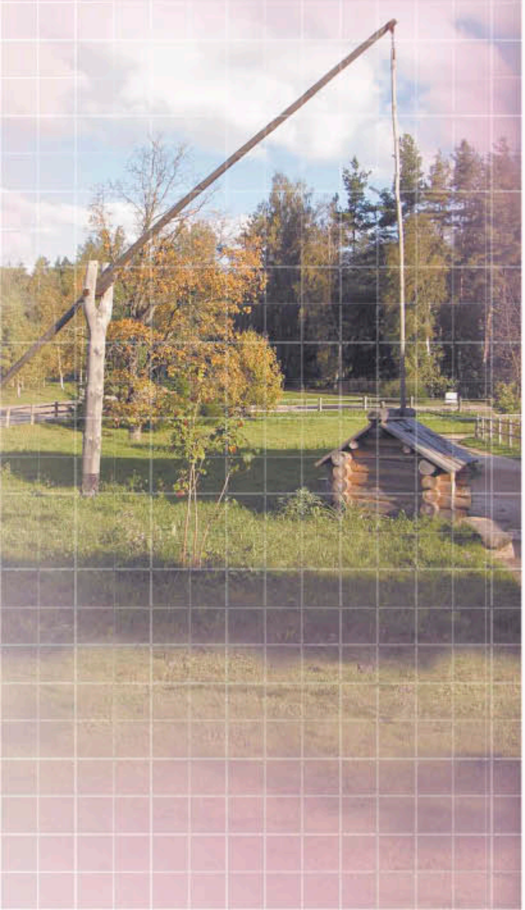
4.1 МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют средним геометрическим двух отрезков
- Как построить среднее геометрическое двух отрезков
- Соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух отрезков

Рис. 4.1





Вам уже известны некоторые свойства прямоугольного треугольника: сумма острых углов равна 90°; гипотенуза больше любого из катетов; катет, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы. Какими ещё свойствами обладает прямоугольный треугольник?

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ Прежде чем продолжить изучение прямоугольного треугольника, вспомним, что называют перпендикуляром, наклонной и её проекцией.

Пусть точка A не лежит на прямой a. Проведём через точку A прямую, перпендикулярную прямой a, и обозначим через B точку пересечения прямых (рис. *4.1*).

Отрезок AB называют **перпендикуляром** к прямой a, точку B — основанием перпендикуляра.

Пусть C — любая точка прямой a, отличная от точки B. Отрезок AC называют **наклонной**, проведённой из точки A к прямой a, точку C — основанием наклонной, отрезок BC — **проекцией** наклонной.

Наклонная и её проекция взаимосвязаны с перпендикуляром. Невозможно указать проекцию данной наклонной, не построив перпендикуляр.

Перпендикуляр и наклонная, проведённые из одной точки, вместе с проекцией наклонной образуют прямоугольный треугольник, в котором перпендикуляр и проекция — катеты, наклонная — гипотенуза.

СВОЙСТВО ВЫСОТЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. По сложившейся традиции обозначим буквой C вершину прямого угла и проведём к гипотенузе высоту CH (рис. *4.2*).

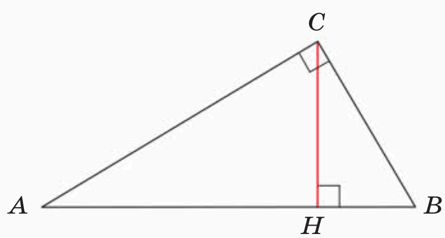


Рис. 4.2

Докажем важное свойство такой высоты.

Теорема. **Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит треугольник на два треугольника, подобных между собой и исходному.**

Доказательство.

1. $\triangle ACH \backsim \triangle ABC$ по двум углам:
$\angle A$ — общий, $\angle ACB = \angle AHC = 90°$.
2. $\triangle CBH \backsim \triangle ABC$ по двум углам:
$\angle B$ — общий, $\angle CHB = \angle ACB = 90°$.
3. $\triangle ACH \backsim \triangle CBH$ по двум углам:
$\angle AHC = \angle CHB = 90°$,
$\angle ACH = 90° - \angle A = \angle B$. ▼

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведём высоту CH (рис. *4.3*).

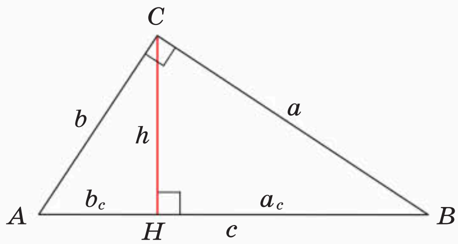


Рис. 4.3

В прямоугольном треугольнике приняты такие обозначения: гипотенузу AB обозначают буквой c, катет BC, лежащий напротив угла A, — буквой a, катет AC — буквой b, высоту CH — h, AH — проекцию катета b на гипотенузу c — обозначают b_c, а HB — проекцию катета a на гипотенузу c — обозначают a_c.

ТЕОРЕМА. В прямоугольном треугольнике квадрат высоты, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.

Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (рис. *4.3*).

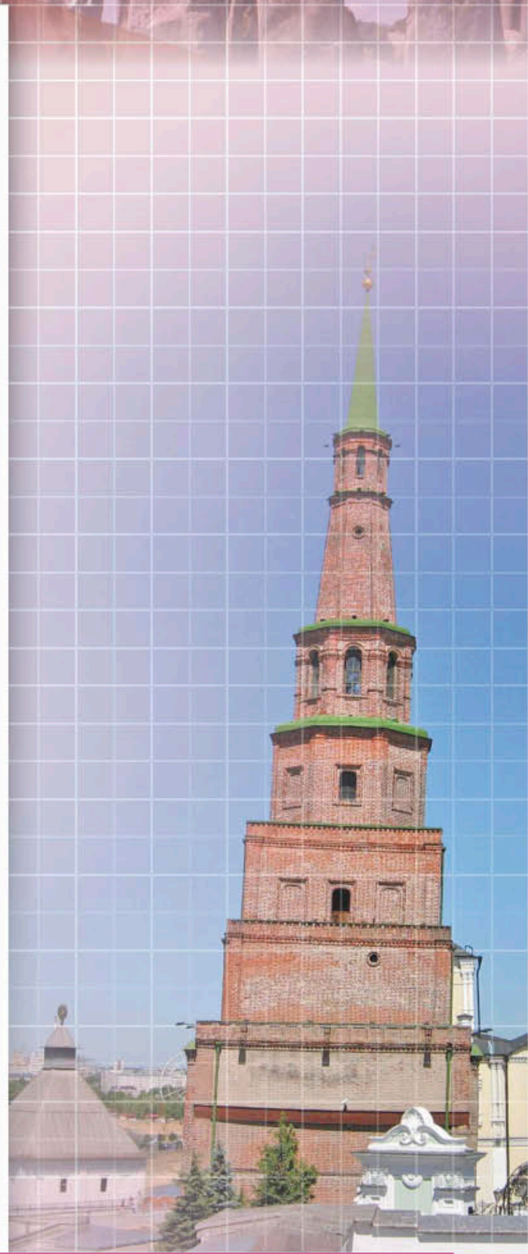
Докажем следующие соотношения:

$$\boldsymbol{h^2 = a_c \cdot b_c; \qquad b^2 = c \cdot b_c; \qquad a^2 = c \cdot a_c.}$$

Эти соотношения следуют из подобия треугольников, доказанного в предыдущей теореме.

1. Так как $\triangle ACH \backsim \triangle CBH$, то
$\dfrac{CH}{AH} = \dfrac{BH}{CH}$, то есть $\dfrac{h}{b_c} = \dfrac{a_c}{h}$, отсюда $h^2 = a_c \cdot b_c$.
2. Так как $\triangle ACH \backsim \triangle ABC$, то
$\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AC}{AB}$, то есть $\dfrac{b_c}{b} = \dfrac{b}{c}$, отсюда $b^2 = c \cdot b_c$.
3. Так как $\triangle CBH \backsim \triangle ABC$, то
$\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{BC}{AB}$, то есть $\dfrac{a_c}{a} = \dfrac{a}{c}$, отсюда $a^2 = c \cdot a_c$. ▼

Доказанные выше соотношения называют **метрическими сооотношениями в прямоугольном треугольнике.**



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Укажите, какой из отрезков на рисунке *4.1* является перпендикуляром, какой — наклонной, а какой — проекцией.
- Сформулируйте и докажите теорему о свойствах высоты, проведённой из вершины прямого угла треугольника.
- Сформулируйте и докажите теорему о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике.

4.2 СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ И СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ДВУХ ОТРЕЗКОВ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют средним геометрическим и что — средним арифметическим двух отрезков
- Какое соотношение связывает среднее геометрическое и среднее арифметическое двух отрезков

Среднее геометрическое ещё называют средним пропорциональным. Как вы думаете, почему?

Вам уже известно, что такое среднее арифметическое двух чисел. Выясним, что является средним арифметическим и средним геометрическим двух отрезков.

СРЕДНЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ДВУХ ОТРЕЗКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отрезок MN называют **средним геометрическим отрезков** AB и CD, если

$$MN^2 = AB \cdot CD.$$

Так, высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, является средним геометрическим проекций катетов на гипотенузу, так как

$$h^2 = a_c \cdot b_c.$$

Данное соотношение позволяет решить следующую задачу:

построить среднее геометрическое двух отрезков a и b (рис. 4.4).

1. На произвольной прямой отложим последовательно отрезки $AB = a$ и $BC = b$ (рис. 4.5).
2. Построим окружность с диаметром AC.
3. Через точку B проведём прямую, перпендикулярную прямой AC (рис. 4.6).

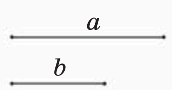


Рис. 4.4

Рис. 4.5

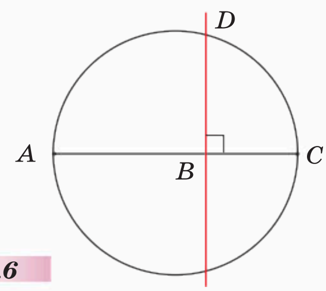


Рис. 4.6

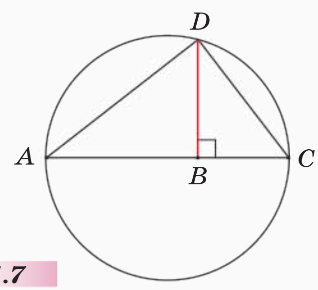


Рис. 4.7

4. Обозначим одну из точек пересечения этой прямой с окружностью буквой D и проведём отрезок BD (рис. 4.7).

Докажем, что отрезок BD — искомый.

AC — диаметр окружности (рис. 4.7), следовательно, $\angle ADC = 90^\circ$ как вписанный угол, опирающийся на диаметр, тогда $\triangle ADC$ — прямоугольный и DB — высота, опущенная из вершины прямого угла, значит,

$$BD^2 = AB \cdot BC.$$

Таким образом, отрезок BD является средним геометрическим отрезков a и b.

Замечание. **Среднее геометрическое двух отрезков** $\boldsymbol{a}$ **и** $\boldsymbol{b}$ **часто записывают так:**

$$\sqrt{ab}.$$

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ ДВУХ ОТРЕЗКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Средним арифметическим двух отрезков** называют отрезок, длина которого равна полусумме длин этих отрезков.

ТЕОРЕМА. Среднее арифметическое двух отрезков не меньше их среднего геометрического.

Доказательство. Нам даны два отрезка a и b.

Докажем, что $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

1-й случай. Отрезки a и b не равны между собой (рис. *4.4*).

Вернёмся к рисунку *4.7*. По доказанному выше BD — среднее геометрическое отрезков a и b, то есть $BD = \sqrt{ab}$.

Проведём радиус окружности OD (рис. *4.8*).

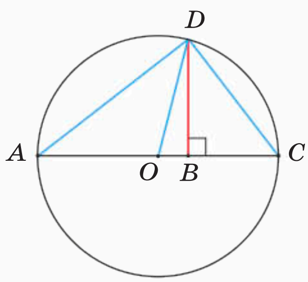


Рис. 4.8

Диаметр AC построенной окружности равен сумме отрезков a и b, значит, радиус OD равен их полусумме, то есть среднему арифметическому этих отрезков.

Итак, $OD = \frac{a+b}{2}$.

В прямоугольном треугольнике ODB отрезок OD является гипотенузой, отрезок DB — катетом. Значит, $OD > DB$, то есть

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Таким образом,

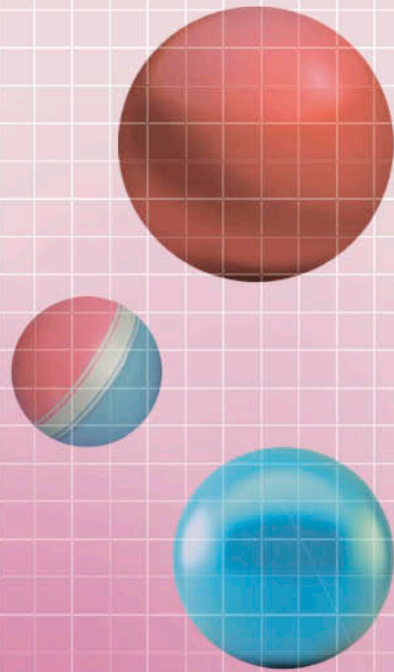
среднее арифметическое двух неравных отрезков больше их среднего геометрического.

2-й случай. Отрезки a и b равны.

Когда два отрезка равны, их среднее арифметическое равно среднему геометрическому и равно каждому из этих отрезков.

Таким образом, для любых двух отрезков a и b справедливо неравенство

$$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} \geqslant \sqrt{\boldsymbol{ab}}. \quad ▼$$



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют средним арифметическим и что — средним геометрическим двух отрезков?
- Какое ещё есть название у среднего геометрического двух отрезков?
- Объясните, как построить среднее геометрическое двух отрезков.
- Каково соотношение между средним арифметическим и средним геометрическим двух отрезков? Докажите своё утверждение.
- Сформулируйте теорему о метрических соотношениях в прямоугольном треугольнике, используя определение среднего геометрического двух отрезков.

4.3 ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Теорему Пифагора
- Теорему, обратную теореме Пифагора
- Какие треугольники называются пифагоровыми

Представленное здесь доказательство не является классическим доказательством теоремы Пифагора. В ранние времена теорема Пифагора формулировалась как равенство площадей, и позднее вы познакомитесь с таким доказательством.

Вообще, существует около 500 способов доказательства теоремы Пифагора.

Теорема Пифагора — самая известная теорема геометрии и одна из самых красивых. Иоганн Кеплер, великий учёный Средневековья, писал: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — теорема Пифагора».

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Теорема. **В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

Доказательство. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза равна c, катеты — a и b (рис. *4.9*).

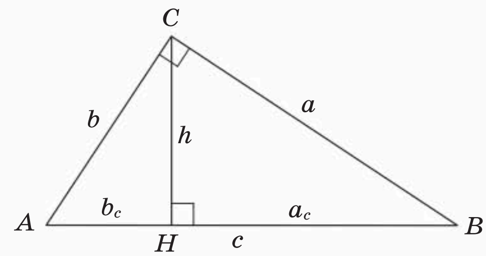


Рис. 4.9

Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Проведём к гипотенузе высоту CH. Тогда

$$a^2 = c \cdot a_c; \qquad b^2 = c \cdot b_c.$$

Сложив почленно эти равенства, получим

$a^2 + b^2 = c \cdot a_c + c \cdot b_c = c\,(a_c + b_c) = c \cdot c = c^2$, то есть

$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}. \quad ▼$$

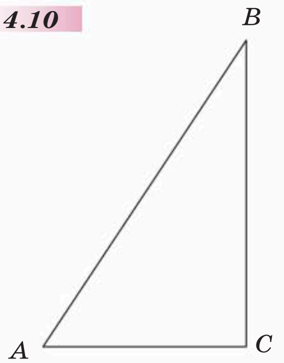
Теорема Пифагора выражает свойство прямоугольного треугольника.

Теорема Пифагора позволяет по известным двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону.

Справедлива и теорема, обратная теореме Пифагора.

Теорема. **Если квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов других сторон треугольника, то такой треугольник — прямоугольный.**

Рис. 4.10



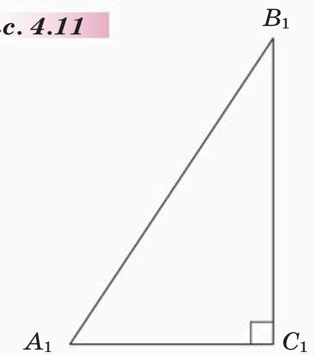
Доказательство. Пусть в треугольнике ABC выполняется равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (рис. *4.10*).

Докажем, что $\angle C = 90°$.

Построим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$, у которого угол C_1 — прямой и катеты

$$A_1C_1 = AC, \quad B_1C_1 = BC \text{ (рис. } 4.11\text{)}.$$

Рис. 4.11



Тогда по теореме Пифагора

$$A_1B_1{}^2 = A_1C_1{}^2 + B_1C_1{}^2.$$

Так как $A_1C_1 = AC$ и $B_1C_1 = BC$, то

$$A_1B_1{}^2 = AC^2 + BC^2 = AB^2, \text{ то есть } A_1B_1 = AB.$$

Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трём сторонам. Следовательно, $\angle C = \angle C_1 = 90°$.

Теорема, обратная теореме Пифагора, позволяет определить, является ли треугольник прямоугольным. То есть данную теорему можно рассматривать как признак прямоугольного треугольника.

Так, мы можем доказать, что известный вам «египетский» треугольник со сторонами 3, 4 и 5 действительно является прямоугольным.

Так как $5^2 = 3^2 + 4^2$, то по теореме, обратной теореме Пифагора, такой треугольник — прямоугольный.

Существует множество прямоугольных треугольников, стороны которых выражаются натуральными числами, например треугольники со сторонами 6, 8 и 10 или 5, 12 и 13.

Тройки натуральных чисел a, b и c, для которых выполняется равенство $a^2 + b^2 = c^2$, называют **пифагоровыми тройками**, а прямоугольные треугольники, длины сторон которых выражаются натуральными числами, называют **пифагоровыми треугольниками**.

Трудно переоценить теоретическую и практическую роль теоремы Пифагора: из теоремы или с её помощью можно вывести большинство теорем евклидовой геометрии; благодаря этой теореме мы можем находить расстояния между точками, не измеряя его непосредственно, и т. д.

Пользуясь теоремой Пифагора, нетрудно доказать свойства наклонных и их проекций.

Свойство 1. **Если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и любая наклонная, то наклонная больше перпендикуляра и больше своей проекции** (рис. *4.12*).

Свойство 2. **Равные наклонные, проведённые к прямой из одной точки, имеют равные проекции, и наоборот: если проекции наклонных, проведённых к прямой из одной точки, равны, то равны и сами наклонные** (рис. *4.13*).

Свойство 3. **Бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию, и наоборот: из двух наклонных больше та, у которой проекция больше (рис. *4.14*).**

Все эти свойства вы можете доказать самостоятельно.

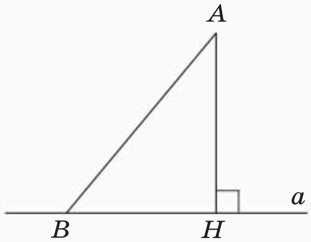


Рис. 4.12

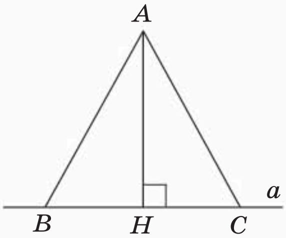


Рис. 4.13

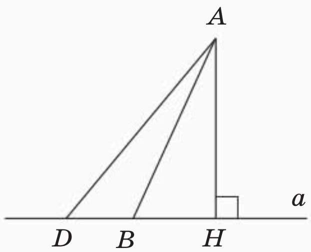
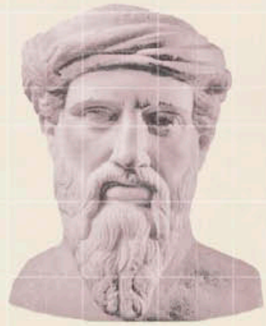


Рис. 4.14



Пифагор (VI в. до н. э.) — великий древнегреческий философ и математик, основатель знаменитой пифагорейской школы, благодаря которой геометрия достигла высокого развития в Древней Греции.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
- Запишите теорему Пифагора для прямоугольного треугольника, изображённого на рисунке *4.12*.
- Как, зная две стороны прямоугольного треугольника, найти третью сторону? Найдите сторону BH треугольника ABH (рис. *4.12*), если $AB = 17$ см, $AH = 15$ см.
- Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.
- Является ли треугольник прямоугольным, если его стороны равны: а) 12, 15 и 20? б) 20, 21 и 29?
- Две наклонные к прямой имеют равные проекции. Обязательно ли эти наклонные равны?
- Сколько можно провести равных наклонных к прямой из точки, не лежащей на этой прямой?
- Отрезки a_1 и a_2 — соответственно проекции наклонных b_1 и b_2, проведённых из одной точки к одной прямой. Сравните:
  1) a_1 и a_2, если $b_1 > b_2$;
  2) b_1 и b_2, если $a_1 = a_2$.

4.4 СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

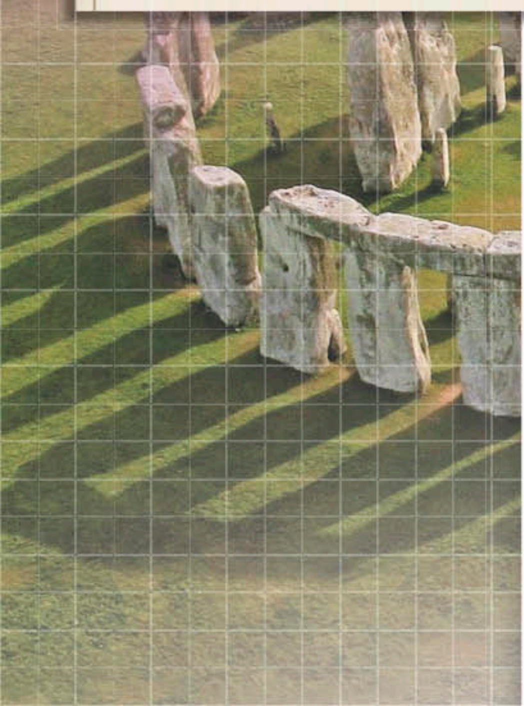
ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом острого угла прямоугольного треугольника

Какая существует зависимость между сторонами и углами треугольника? Можно ли найти, например, угол треугольника, зная его стороны, или наоборот? Необходимость в решении таких задач возникла ещё в древности в связи с практическими потребностями расчётов в астрономии, навигации, архитектуре. Такие задачи приходится решать и в настоящее время. Тригонометрия – раздел математики, рассматривающий в том числе и такие вопросы. Изучение тригонометрии начнём с зависимостей в прямоугольном треугольнике.

Тригонометрия – слово греческого происхождения, означает буквально «измерение треугольников».

Считается, что термин «синус» происходит изначально от индийского «джива», перешедшего в арабский как «джайб», что переводится на латынь как «sinus».



СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС, КОТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C (рис. *4.15*).

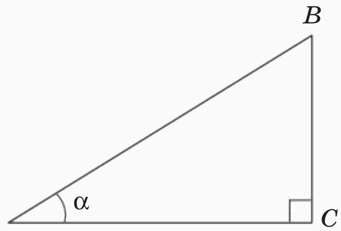


Рис. 4.15

Катет BC называют противолежащим углу A, а катет AC — прилежащим к углу A.

Определение. **Синусом острого угла прямоугольного треугольника** называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Пусть угол при вершине A равен α. Синус угла α, обозначают символом $\sin\alpha$ и читают «синус альфа».

На рисунке *4.16* синус угла A равен отношению противолежащего катета BC к гипотенузе AB.

Записывается это так: $\sin A = \dfrac{BC}{AB}$.

Для прямоугольного треугольника на рисунке *4.16*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \qquad \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

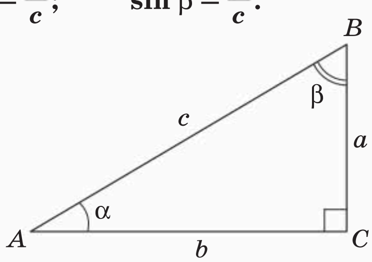


Рис. 4.16

Определение. **Косинусом острого угла прямоугольного треугольника** называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла α обозначают символом $\cos\alpha$ и читают «косинус альфа».

На рисунке *4.15* косинус угла A равен отношению прилежащего катета AC к гипотенузе AB.

Записывается это так: $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$.

Для прямоугольного треугольника на рисунке *4.16*

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \qquad \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

Так как любой катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы, то синус и косинус острого угла меньше 1.

Определение. **Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника** называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Тангенс угла α обозначают символом $\operatorname{tg}\alpha$ и читают «тангенс альфа».

На рисунке *4.15* тангенс угла A равен отношению противолежащего катета BC к прилежащему AC.

Записывается это так: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{BC}{AC}$.

Для прямоугольного треугольника на рисунке *4.16*

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}.$$

Определение. **Котангенсом острого угла прямоугольного треугольника** называют отношение прилежащего катета к противолежащему.

Котангенс угла α обозначают символом $\operatorname{ctg}\alpha$ и читают «котангенс альфа».

На рисунке *4.15* котангенс угла A равен отношению прилежащего катета AC к противолежащему катету BC.

Записывается это так: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{AC}{BC}$.

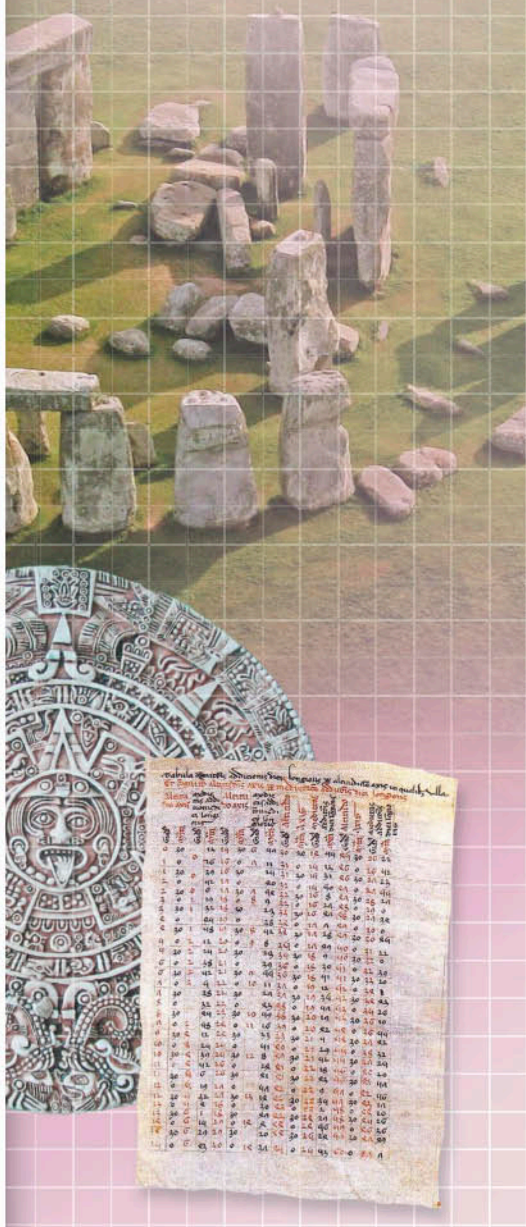
Для прямоугольного треугольника на рисунке *4.16*

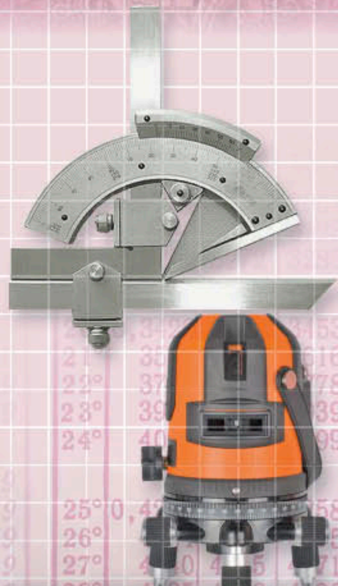
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}; \qquad \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Все прямоугольные треугольники с острым углом α подобны между собой.

Поэтому отношения, определяющие синус, косинус, тангенс и котангенс, для всех таких треугольников одинаковы, зависят лишь от величины угла α, то есть являются функцией угла α.

Докажем это.

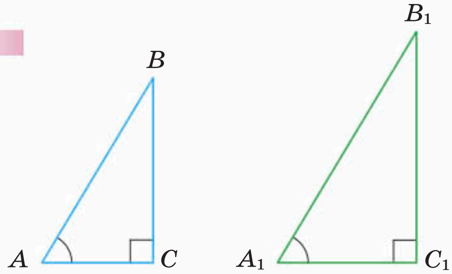




Теорема. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника зависят только от величины угла.

Доказательство. Пусть прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с прямыми углами C и C_1 соответственно имеют равные углы A и A_1 (рис. *4.17*).

Рис. 4.17



Тогда $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам.

Следовательно: $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$.

$$\sin A_1 = \frac{B_1C_1}{A_1B_1} = \frac{kBC}{kAB} = \frac{BC}{AB} = \sin A;$$

$$\cos A_1 = \frac{A_1C_1}{A_1B_1} = \frac{kAC}{kAB} = \frac{AC}{AB} = \cos A;$$

$$\operatorname{tg} A_1 = \frac{B_1C_1}{A_1C_1} = \frac{kBC}{kAC} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} A;$$

$$\operatorname{ctg} A_1 = \frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{kAC}{kBC} = \frac{AC}{BC} = \operatorname{ctg} A. \quad ▼$$

Синус, косинус, тангенс и котангенс называют **тригонометрическими функциями острого угла.**

Рассмотрим прямоугольный треугольник на рисунке *4.18*.

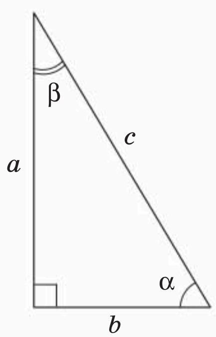


Рис. 4.18

По определению $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ и $\cos\beta = \frac{a}{c}$.

Следовательно,

$$\cos\beta = \sin\alpha. \qquad (1)$$

Также выполняются следующие равенства:

$$\sin\beta = \cos\alpha; \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha; \qquad (3)$$

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha. \qquad (4)$$

Таким образом, если мы знаем значение тригонометрических функций одного из острых углов прямоугольного треугольника, это означает, что мы знаем значение тригонометрических функций и другого острого угла этого треугольника.

Из приведённых выше равенств следует ряд важных тождеств.

По свойству углов прямоугольного треугольника

$$\alpha + \beta = 90^\circ, \text{ отсюда } \beta = 90^\circ - \alpha.$$

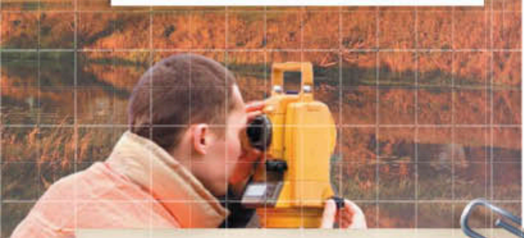
Тогда из равенств (1)—(4) следуют тождества:

$$\mathbf{\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha;}$$

$$\mathbf{\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha;}$$

$$\mathbf{\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha;}$$

$$\mathbf{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.}$$



Названия функций синус и косинус, тангенс и котангенс отличаются приставкой ко, происходящей от латинского слова complimentus — дополнительный — и означающей, что эти функции связаны рассмотренной здесь зависимостью, а именно, для острых углов A и B прямоугольного треугольника (дополняющих друг друга до 90°), выполняются равенства:

$\cos A = \sin B$, $\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B$.

Задача 1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC известно, что $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AD = 15$ см, $\angle A = 90°$. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс меньшего угла трапеции.

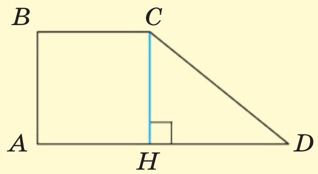


Рис. 1

Решение. В трапеции $ABCD$ (рис. *1*): $\angle A = 90°$, $BC < AD$, следовательно, меньшим будет угол D. Проведём высоту CH, получим прямоугольник $ABCH$, в котором $AH = BC = 7$ см, $CH = AB = 6$ см. Тогда $DH = AD - AH = 15$ см $- 7$ см $= 8$ см. Рассмотрим прямоугольный треугольник CHD. По теореме Пифагора $CD^2 = CH^2 + HD^2$. Отсюда

$$CD = \sqrt{36 + 64} \text{ см} = 10 \text{ см}.$$

$$\sin D = \frac{CH}{CD} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \qquad \cos D = \frac{HD}{CD} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg} D = \frac{CH}{HD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}; \qquad \operatorname{ctg} D = \frac{HD}{CH} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\sin D = \frac{3}{5}$; $\cos D = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} D = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} D = \frac{4}{3}$.

Задача 2. Найдите синус угла 18°.

Решение. Построим прямоугольный треугольник ABC с углом B, равным 18°, и достроим его до равнобедренного треугольника ABD так, как показано на рисунке *2*. Тогда угол при вершине равнобедренного треугольника равен 36°, а значит, равнобедренный треугольник ABD является «золотым» (см. п. 3.1). Пусть боковая сторона $AB = 1$, тогда основание $AD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, так как BC — высота и медиана равнобедренного треугольника, то $AC = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

В прямоугольном треугольнике ABC:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} : 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

таким образом, $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Ответ: $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

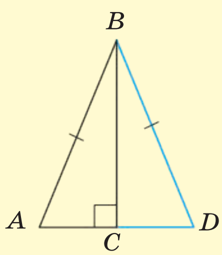


Рис. 2

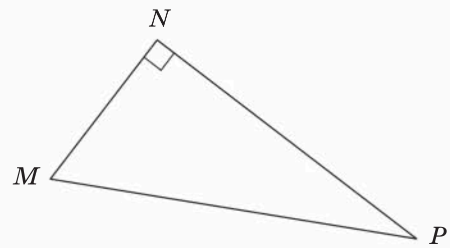
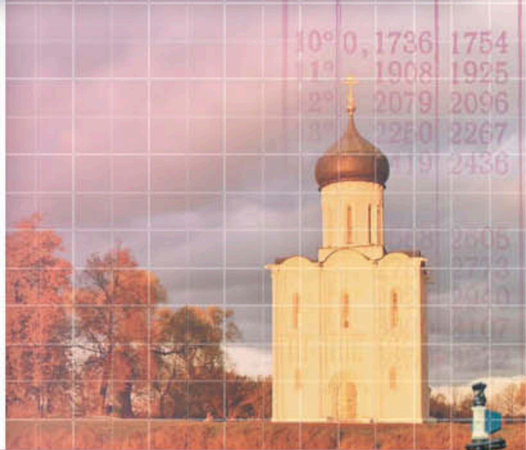


Рис. 4.19



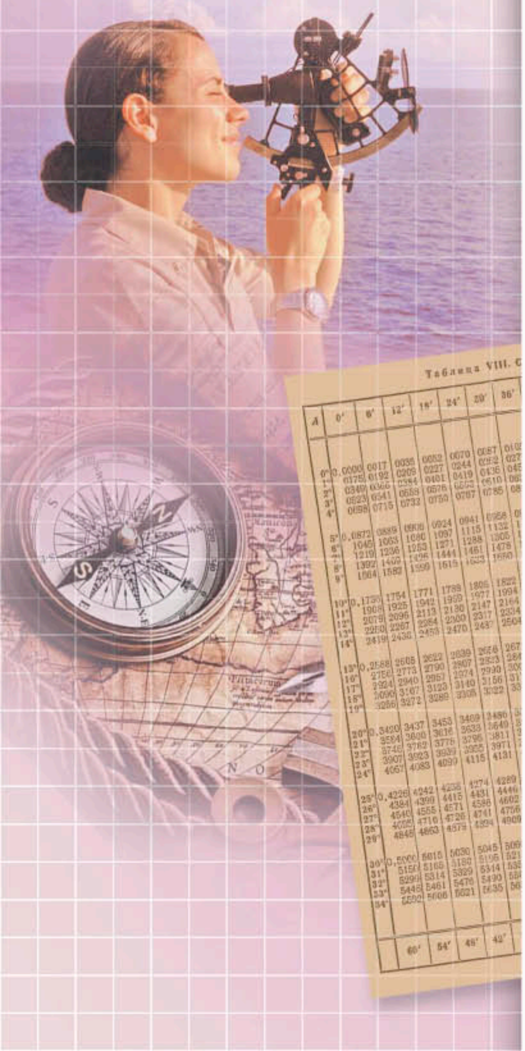
ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Дайте определение синуса острого угла прямоугольного треугольника.
- Дайте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника.
- Дайте определение тангенса острого угла прямоугольного треугольника.
- Дайте определение котангенса острого угла прямоугольного треугольника.
- На рисунке *4.19* изображён прямоугольный треугольник MNP. Запишите, чему равны $\sin P$, $\cos M$, $\operatorname{tg} M$, $\operatorname{ctg} P$, $\cos P$, $\sin M$, $\operatorname{ctg} M$, $\operatorname{tg} P$.
- Докажите, что синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла зависят только от градусной меры угла.
- Докажите, что для любого острого угла выполняется неравенство $\sin \alpha < 1$.
- Может ли косинус острого угла быть равен: 0,89; 2; $\sqrt{3} - 1$?

4.5 ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют основным тригонометрическим тождеством
- Как связаны между собой тригонометрические функции одного угла



Из определений тригонометрических функций острого угла следует несколько важных соотношений, называемых тригонометрическими тождествами.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА На рисунке *4.20* изображён прямоугольный треугольник.

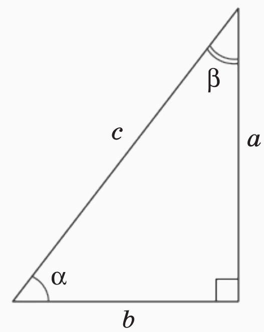


Рис. 4.20

По определению тригонометрических функций острого угла:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

По теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Поделив почленно обе части равенства на c^2, получим:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

или

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Чтобы упростить запись, это равенство записывают так:

$$\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.}$$

Это важнейшее равенство, вытекающее из теоремы Пифагора, называют **основным тригонометрическим тождеством**. На нём основывается вся тригонометрия.

Кстати, если в прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 1, то основное тригонометрическое тождество и есть теорема Пифагора.

Основное тригонометрическое тождество позволяет выразить синус угла через его косинус и наоборот:

$$\mathbf{\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}; \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}.}$$

Докажем несколько тождеств.

Тангенс и котангенс острого угла можно выразить через синус и косинус этого же угла.

Рассмотрим рисунок *4.20*. По определению $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на c, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \sin\alpha : \cos\alpha; \quad \text{то есть}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}.$$

Если вы заметили, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$ являются взаимно обратными числами. Получается следующее тождество:

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}.$$

Докажем ещё 2 тождества.

Запишем основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и, разделив обе его части почленно на $\cos^2\alpha$, получим:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

или

$$\boldsymbol{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}.$$

Если же обе части основного тригонометрического тождества разделить на $\sin^2\alpha$, то получим равенство:

$$1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

или

$$\boldsymbol{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}.$$

Тригонометрические тождества позволяют по одной из известных величин — $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$ — найти три другие.

ЗНАЧЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ С древних времён люди вычисляли приближённые значения тригонометрических функций углов, составляли таблицы этих значений. Такие таблицы позволяли по известным значениям тригонометрических функций находить угол и наоборот. Таблицы широко использовались в астрономии, мореплавании, различных отраслях науки и техники. Ещё в конце XX века каждому старшекласснику были известны таблицы Брадиса, содержащие значения тригонометрических функций углов. В настоящее время эти значения вычисляет калькулятор.

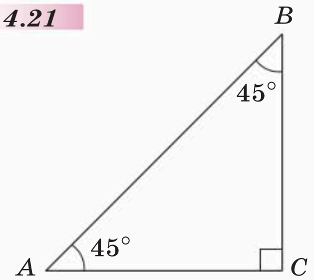


Рис. 4.21

Значения тригонометрических функций некоторых углов мы можем найти и без таблиц.

Найдем синус, косинус, тангенс и котангенс угла 45°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с острым углом, равным 45°. Второй его острый угол тоже будет равен 45°, то есть треугольник ABC — равнобедренный (рис. *4.21*).

Пусть $AC = BC = a$, $AB = c$.

По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, то есть

$$c = a\sqrt{2}.$$

Получаем:

$$\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{a} = 1; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{a} = 1.$$

Найдем синус, косинус, тангенс, котангенс углов 30° и 60° (рис. *4.22*).

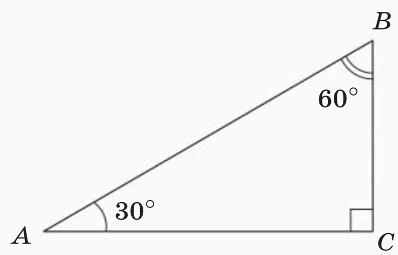


Рис. 4.22

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30°, $AB = c$ (рис. *4.22*). Тогда по свойству катета, лежащего напротив угла в 30°, $BC = \frac{1}{2}AB = \frac{c}{2}$.

Найдём AC. По теореме Пифагора

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\frac{3c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда $\sin 30° = \frac{BC}{AB} = \frac{c}{2} : c = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2};$

$$\cos 30° = \frac{AC}{AB} = \frac{c\sqrt{3}}{2} : c = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30° = \frac{1}{\operatorname{tg} 30°} = \sqrt{3}.$$

Так как $\angle A + \angle B = 90°$, то $\angle B = 90° - 30° = 60°$; $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, то есть $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Аналогично получим:

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30°, 45° и 60° полезно знать.

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 60^\circ$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC, где $\angle C = 90^\circ$, найдите $\operatorname{tg} A$, если $\cos A = \frac{1}{3}$.

Решение. Найдём синус угла A:

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2\sqrt{2}}{3} : \frac{1}{3} = 2\sqrt{2}.$$

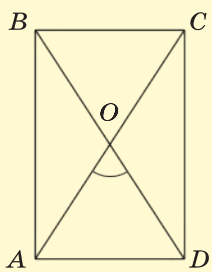
Ответ: $\operatorname{tg} A = 2\sqrt{2}$.

Задача 2. В прямоугольнике $ABCD$: $AB = 5\sqrt{3}$; $AD = 5$. Найдите угол между диагоналями прямоугольника.

Решение. Изобразим прямоугольник $ABCD$. Углом между диагоналями является угол AOD или вертикальный ему угол BOC. Найдём угол AOD. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABD.

$$\operatorname{tg}(ADB) = \frac{AB}{AD} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}.$$

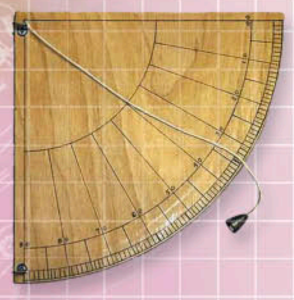
Тогда $\angle ADB = 60^\circ$.



По свойству диагоналей прямоугольника $OA = OD$, следовательно, треугольник AOD — равнобедренный, отсюда $\angle OAD = \angle ODA = 60^\circ$.

$\angle AOD = 180^\circ - (\angle OAD + \angle ODA) =$
$= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Ответ: 60°.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

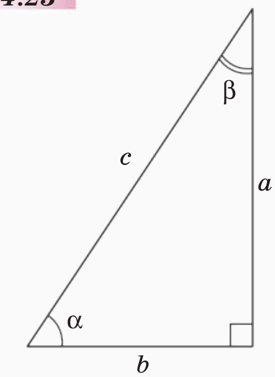
- В чём заключается основное тригонометрическое тождество? Докажите его.
- Могут ли синус и косинус одного угла быть равными:
  а) $\frac{1}{4}$ и $\frac{3}{4}$? б) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$?
- Как связаны между собой $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$?
- Докажите, что тангенсы острых углов прямоугольного треугольника взаимо обратны.
- Как выразить тангенс и котангенс через синус и косинус?
- Как, зная косинус угла, найти тангенс этого угла?
- Как, зная синус угла, найти котангенс этого угла?
- Чему равны $\sin 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\sin 60^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\operatorname{ctg} 45^\circ$?

4.6

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют решением прямоугольных треугольников

Рис. 4.23



РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Вы, наверное, уже заметили, что многие геометрические задачи сводятся к решению треугольников. Поэтому очень важно освоить умение решать треугольники. Решение треугольников состоит в нахождении неизвестных сторон и углов по известным сторонам и углам. Решение треугольников начнём с решения прямоугольных треугольников.

НАХОЖДЕНИЕ СТОРОН ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ЧЕРЕЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА На рисунке *4.23* катеты прямоугольного треугольника равны a и b, гипотенуза — c, острые углы — α и β.

По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; отсюда

$$\boldsymbol{a = c \sin\alpha.}$$

Катет, противолежащий острому углу α, равен произведению гипотенузы на синус угла α.

По определению косинуса острого угла прямоугольного треугольника $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; отсюда

$$\boldsymbol{b = c \cos\alpha.}$$

Катет, прилежащий к острому углу α, равен произведению гипотенузы на косинус угла α.

По определению тангенса острого угла прямоугольного треугольника $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; отсюда

$$\boldsymbol{a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha.}$$

Катет, противолежащий острому углу α, равен произведению второго катета на тангенс угла α.

По определению котангенса острого угла прямоугольного треугольника $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$; отсюда

$$\boldsymbol{b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha.}$$

Катет, прилежащий к острому углу α, равен произведению другого катета на котангенс угла α.

Вернёмся к определению синуса и косинуса острого угла прямоугольного треугольника:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

отсюда

$$\boldsymbol{c = \frac{a}{\sin\alpha}} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{c = \frac{b}{\cos\alpha}}.$$

Гипотенуза равна частному от деления катета, противолежащего углу α, на синус α, а также гипотенуза равна частному от деления катета, прилежащего углу α, на косинус α.

Таким образом, знание тригонометрических функций острых углов прямоугольного треугольника позволяет находить стороны треугольника.

Если известен угол, значение любой тригонометрической функции угла находят с помощью калькулятора или таблицы. (Значения тригонометрических функций некоторых углов представлены в таблице на странице 175 учебника.)

Если требуется обратная операция — по значению тригонометрической функции угла найти сам угол, — также используют калькулятор или таблицу.

На решении конкретных задач рассмотрим все возможные случаи решения прямоугольных треугольников. Их всего четыре — решение прямоугольных треугольников по двум катетам, по гипотенузе и катету, по катету и острому углу, по гипотенузе и острому углу.

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ДВУМ КАТЕТАМ

Задача 1. В прямоугольном треугольнике известны катеты: $a = 9$, $b = 40$. Решить прямоугольный треугольник.

Решение. В прямоугольном треугольнике (рис. *4.24*) нам известны катеты a и b. Нужно найти гипотенузу c и углы α и β.

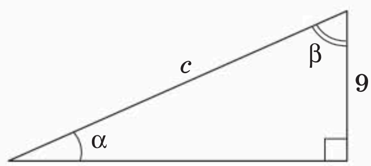


Рис. 4.24

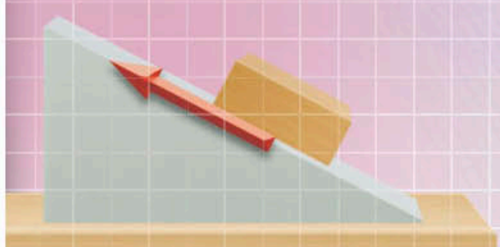
1. По теореме Пифагора найдём гипотенузу c:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 81 + 1600 = 1681;$$

$$c = \sqrt{1681} = 41.$$

2. Найдём одну из тригонометрических функций угла α или угла β. Например:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{9}{40} = 0{,}225.$$

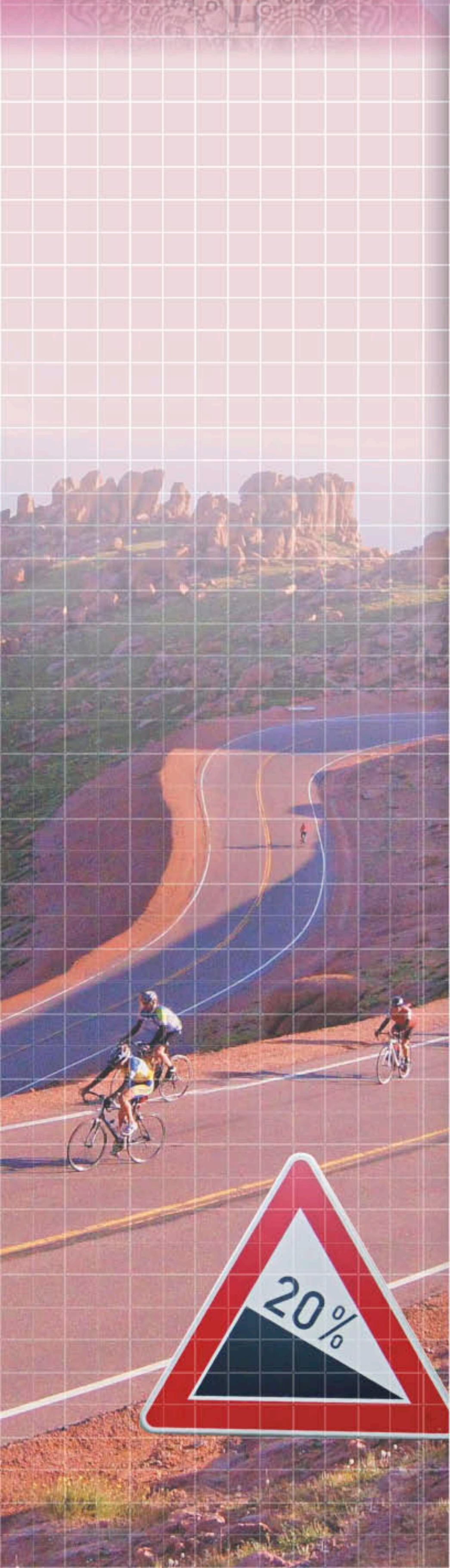


С помощью калькулятора или таблицы на странице 175 учебника находим: $\alpha \approx 13°$.

3. Из равенства $\alpha + \beta = 90°$ находим:

$$\beta \approx 90° - 13° = 77°.$$

Ответ: $c = 41$; $\alpha \approx 13°$; $\beta \approx 77°$.



РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ГИПОТЕНУЗЕ И КАТЕТУ

Задача 2. В прямоугольном треугольнике катет $a = 8$, гипотенуза $c = 17$. Решить прямоугольный треугольник.

Решение. В прямоугольном треугольнике известны гипотенуза c и катет a (рис. *4.25*).

Нужно найти катет b, углы α и β.

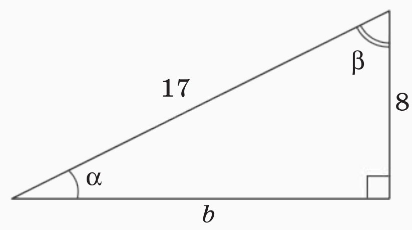


Рис. 4.25

1. По теореме Пифагора найдём катет b:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 17^2 - 8^2 = (17 - 8)(17 + 8) = 9 \cdot 25.$$

$$b = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15.$$

2. Найдём какую-либо тригонометрическую функцию одного из острых углов, например:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{8}{17} \approx 0{,}471.$$

С помощью калькулятора или таблицы найдём: $\alpha \approx 28^\circ$.

3. Из равенства $\alpha + \beta = 90^\circ$ найдём:

$$\beta = 90^\circ - \alpha \approx 90^\circ - 28^\circ = 62^\circ.$$

Ответ: $b = 15$; $\alpha \approx 28^\circ$; $\beta \approx 62^\circ$.

РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО КАТЕТУ И ОСТРОМУ УГЛУ

Задача 3. В прямоугольном треугольнике катет $a = 5$, $\alpha = 40^\circ$. Решить прямоугольный треугольник.

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике на рисунке *4.26* нам известны угол α и катет a. Требуется найти катет b, гипотенузу c и угол β.

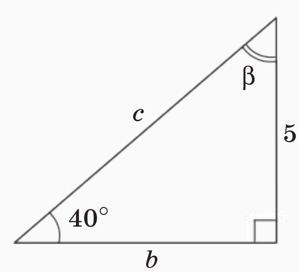


Рис. 4.26

1. Из равенства $\alpha + \beta = 90^\circ$ найдём:

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ.$$

2. Нам известны углы треугольника и катет a. Запишем какое-нибудь тригонометрическое равенство, содержащее катет a. Например:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},$$

отсюда

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Найдём $\sin 40^\circ$ с помощью калькулятора или по таблице.

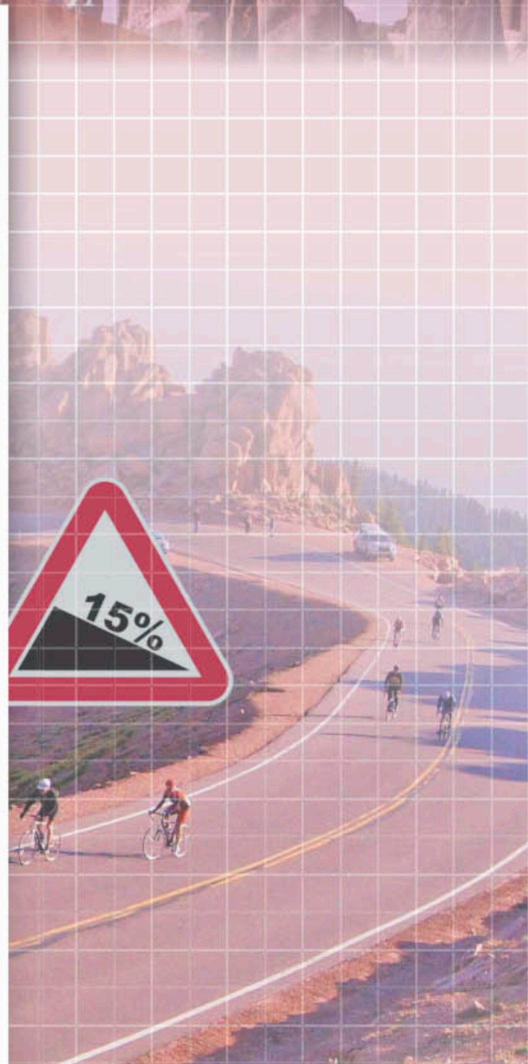
Получаем: $c = \dfrac{5}{\sin 40^\circ} \approx \dfrac{5}{0{,}643} \approx 7{,}8.$

3. Нам осталось найти катет b.

Зная, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$, найдём b:

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{\operatorname{tg} 40^\circ} \approx \frac{5}{0{,}839} \approx 6.$$

Ответ: $b \approx 6$; $c \approx 7{,}8$; $\beta = 50^\circ$.



РЕШЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА ПО ГИПОТЕНУЗЕ И ОСТРОМУ УГЛУ

Задача 4. Решить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу, если гипотенуза c равна 4, а угол $\alpha = 20^\circ$.

Решение. В прямоугольном треугольнике на рисунке *4.27* нам известны гипотенуза c и угол α. Требуется найти катеты a и b, угол β.

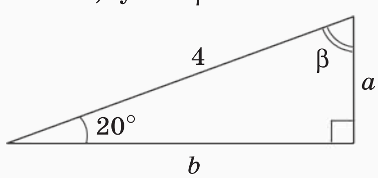


Рис. 4.27

1. Найдём угол β:
$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ.$

2. Так как $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, то

$$a = c\sin\alpha = c\sin 20^\circ = 4\cdot 0{,}342 \approx 1{,}4.$$

3. Из равенства $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$ получаем

$$b = c\sin\beta = c\sin 70^\circ \approx 4\cdot 0{,}940 \approx 3{,}8.$$

Ответ: $a \approx 1{,}4$; $b \approx 3{,}8$; $\beta = 70^\circ$.

Вы, наверное, уже заметили, что представленные решения прямоугольных треугольников не единственные.

Например, в задаче 1 угол α можно было находить, используя формулу синуса или косинуса угла α.

Рассмотрите и обсудите с соседом по парте другие варианты решения задач. Какие из них, на ваш взгляд, более рациональные?

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что значит решить прямоугольный треугольник?
- Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол? через острый угол и другой катет?
- Как выражается гипотенуза через катет и прилежащий к катету острый угол? через катет и противолежащий катету острый угол?
- Сколько возможных случаев решения прямоугольных треугольников? Назовите их.
- С соседом по парте составьте несколько алгоритмов решения каждого из случаев решения прямоугольных треугольников.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 4.1

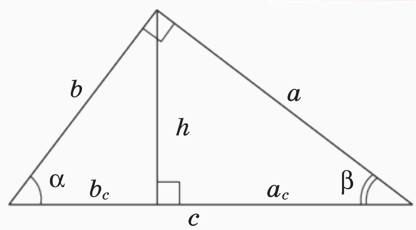
К Т **1** а) Начертите прямоугольный треугольник, катеты которого не равны. Проведите из вершины прямого угла высоту. Обозначив меньший из катетов буквой a, обозначьте принятыми обозначениями остальные элементы треугольника.
1) Выразите гипотенузу c через катет b и его проекцию на гипотенузу и найдите гипотенузу, если катет b равен 6, а его проекция на гипотенузу — 3.
2) Выразите высоту треугольника, проведённую к гипотенузе c через проекции катетов на гипотенузу. Чему равна эта высота, если проекции катетов равны 4 и 16?
3) Выразите катет a через гипотенузу и его проекцию на гипотенузу. Чему равен катет a, если его проекция на гипотенузу равна 5, а гипотенуза — 10?

б) Начертите прямоугольный треугольник, катеты которого не равны. Обозначив проекцию меньшего катета через b_c, обозначьте принятыми обозначениями остальные элементы треугольника.
1) Выразите катет b через гипотенузу и его проекцию на гипотенузу. Чему равен катет b, если его проекция на гипотенузу равна 2, а гипотенуза — 8?
2) Выразите гипотенузу треугольника через катет a и его проекцию на гипотенузу. Чему равна гипотенуза, если катет равен 6, а его проекция — 4?
3) Выразите высоту треугольника, проведённую к гипотенузе, через проекции катетов. Найдите эту высоту, если проекции катетов равны 6 см и 8 см.

2 а) Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки 4 см и 16 см. Найдите длину этой высоты.
б) Высота прямоугольного треугольника, равная 9, делит гипотенузу на отрезки, один из которых равен 4 см. Найдите второй отрезок.

3 Используя рисунок *1*, найдите:
а) a, b и h, если $a_c = 36$, $b_c = 64$;
б) a, b и h, если $a_c = 25$, $b_c = 16$;
в) a, a_c и c, если $b = 24$, $b_c = 12$;
г) b, b_c и c, если $a = 16$, $a_c = 8$.

Рис. 1

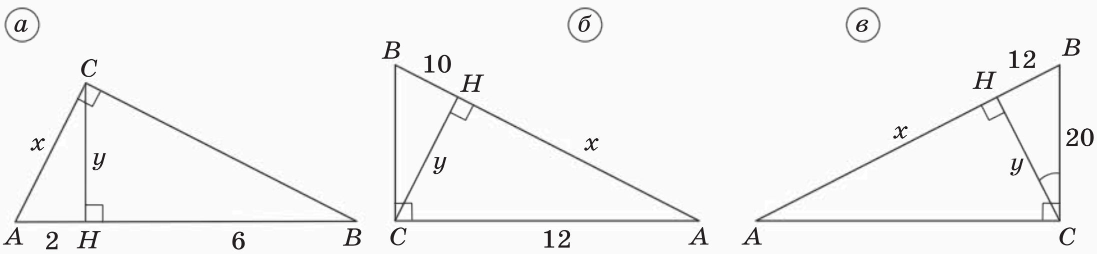


4 Выразите: а) a_c через a и c;
б) b_c через b и c.

5 Пользуясь рисунком *1*, докажите, что:
а) $\frac{a^2}{a_c} = \frac{b^2}{b_c}$; б) $h = \frac{ab}{c}$.

6 Используя рисунок *2*, найдите величины x и y.

Рис. 2



7 а) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, высота, опущенная на гипотенузу, равна 12 см. Чему равны катеты прямоугольного треугольника?
б) Найдите катеты прямоугольного треугольника, если проекции этих катетов на гипотенузу равны 39.

8 а) В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 35. Найдите проекции катетов на гипотенузу, если длины катетов относятся как $2:3$.
б) Проекция одного из катетов на гипотенузу на 7 см больше проекции другого катета. Найдите гипотенузу, если отношение катетов равно $4:3$.

9 а) Медиана, проведённая из вершины прямого угла, делит прямой угол в отношении $2:1$. Найдите стороны и углы прямоугольного треугольника, если медиана равна 8.
б) Стороны прямоугольного треугольника: 7, 24 и 25. Найдите проекции катетов на гипотенузу.

Т 10 а) В прямоугольном треугольнике ABC: CH — высота, проведённая к гипотенузе. Точки D и E — проекции точки H на катеты AC и BC соответственно. $AD = 1$, $BE = 2$. Чему равны катеты треугольника ABC?
б) В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса CD делит гипотенузу на отрезки 3 и 4 см. Найдите катеты треугольника ABC.

11 Центр окружности делит гипотенузу прямоугольного треугольника на отрезки 15 см и 20 см. Окружность касается катетов. Найдите радиус окружности.

12 а) Найдите диагонали ромба, если перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, равен 6 см и делит сторону в отношении $2:3$.
б) Высота BH ромба $ABCD$ делит сторону AD на отрезки $DH = 9$ и $AH = 4$. Найдите высоту ромба.

13 Боковая сторона равнобедренной трапеции, равная 10, перпендикулярна диагонали трапеции. Радиус окружности, описанной около трапеции, равен 8. Найдите среднюю линию трапеции.

14 Две окружности с радиусами R и r касаются друг друга внешним образом в точке M. Общие касательные MN и AB к окружностям пересекаются в точке N. Докажите, что $MN^2 = R \cdot r$.

ПОВТОРЯЕМ

1. Найдите среднее арифметическое чисел 25 и 36.
2. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Докажите, что: а) центр окружности принадлежит гипотенузе; б) медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине.
3. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите AB, если $BC = 36$.

П. 4.2

К 15 а) Начертите окружность, впишите в неё прямоугольный треугольник MNP с прямым углом N. Обозначьте буквой O центр окружности. Проведите радиус ON и высоту треугольника NH.
Укажите, какой отрезок является: 1) средним геометрическим отрезков MH и HP; 2) средним арифметическим отрезков MH и HP.

б) Начертите два неравных отрезка a и b. Постройте отрезок, являющийся: 1) средним геометрическим отрезков a и b; 2) средним арифметическим отрезков a и b.

К **16** а) Даны отрезки: $AB = 4$ см, $CD = 25$ см. Найдите длины отрезков MN и EF, являющихся соответственно средним геометрическим и средним арифметическим отрезков AB и CD.
б) Среднее арифметическое отрезков a и b равно 5, а среднее геометрическое — 4. Найдите отрезки a и b.

К **17** а) Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на её диаметр, делит его на два отрезка, один из которых равен 4 см. Найдите радиус окружности, если длина перпендикуляра равна 6 см.
б) На диаметр окружности, равный 24 см, опущен из точки окружности перпендикуляр. Один из получившихся отрезков диаметра равен 16 см. Чему равна длина перпендикуляра?

18 а) Найдите высоту равнобедренной трапеции, основания которой равны 7 и 25, а диагонали перпендикулярны боковым сторонам.
б) Высота равнобедренной трапеции, опущенная из вершины тупого угла, равна 10 и делит большее основание на отрезки, один из которых равен 5. Известно, что диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Чему равно большее основание трапеции?

19 а) В равнобедренную трапецию вписана окружность. Точка касания делит боковую сторону на отрезки 3 см и 75 см. Найдите радиус окружности.
б) Радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, равен 10. Точка касания делит боковую сторону на отрезки, один из которых равен 25. Найдите боковую сторону трапеции.

К **20** На рисунке *3*: MH — отрезок касательной к окружности с центром O. Докажите, что отрезок MH равен среднему геометрическому отрезков MA и суммы отрезков MO и OA.

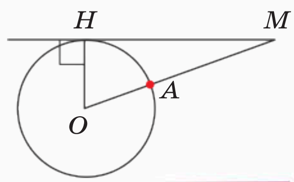


Рис. 3

ПОВТОРЯЕМ

1. Докажите, что радиус описанной около равностороннего треугольника окружности в 2 раза больше радиуса вписанной окружности.
2. Один из углов ромба равен 60°. Найдите периметр ромба, если его меньшая диагональ равна 8 см.
3. Известно, что треугольник ABC — прямоугольный со сторонами 10, 24 и 26 см. Чему равен радиус окружности, описанной около треугольника?

П. 4.3

21 Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны:
а) 5 и 12; б) 8 и 12.

Т **22** На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображены прямоугольные треугольники (рис. *4*). Найдите катеты и гипотенузу каждого треугольника.

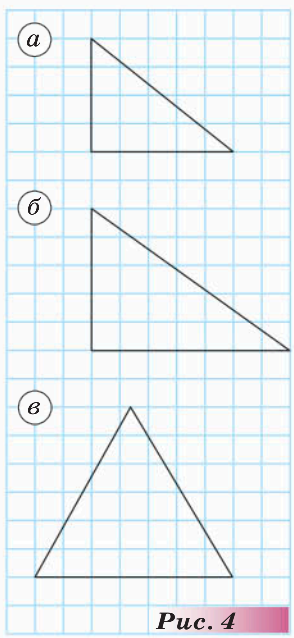


Рис. 4

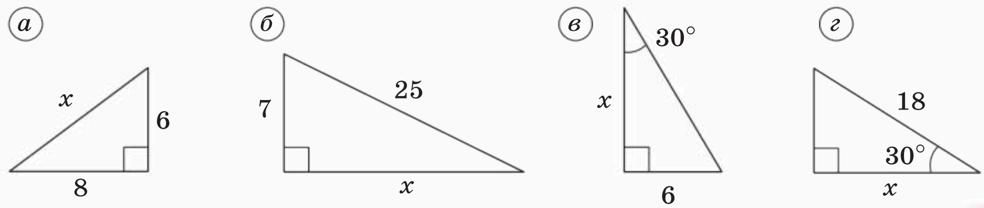


Рис. 5

23 Найдите катет прямоугольного треугольника, если: а) другой катет равен 6, а гипотенуза — 10; б) другой катет равен 24, а гипотенуза — 25.

24 По данным рисунка *5* найдите неизвестную величину x.

К **25** **ЗАДАЧА–ИССЛЕДОВАНИЕ**

1. В прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC найдите:
   а) гипотенузу AB, если $AC = 5$;
   б) катеты AC и BC, если гипотенуза AB равна 8 см.
2. Пусть катет прямоугольного равнобедренного треугольника равен a. Чему равна гипотенуза этого треугольника?
3. Во сколько раз гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника больше катета?
4. Сделайте вывод, как в прямоугольном равнобедренном треугольнике можно найти:
   а) гипотенузу, если известен катет треугольника;
   б) катет, если известна гипотенуза треугольника.
5. Найдите диагональ квадрата, если его сторона равна:
   а) 3 см; б) $4\sqrt{2}$ см; в) a.
6. Найдите сторону квадрата, если его диагональ равна:
   а) 8; б) $5\sqrt{6}$.

К **26** Найдите диагональ прямоугольника, если его стороны равны: а) 3 см и 4 см; б) 9 см и 40 см.

К **27** Найдите периметр прямоугольника, если: а) его диагональ равна 13 см, а одна из сторон — 5 см; б) одна сторона равна 7 см, а диагональ — 25 см.

28 По данным рисунка *6* найдите неизвестную величину x.

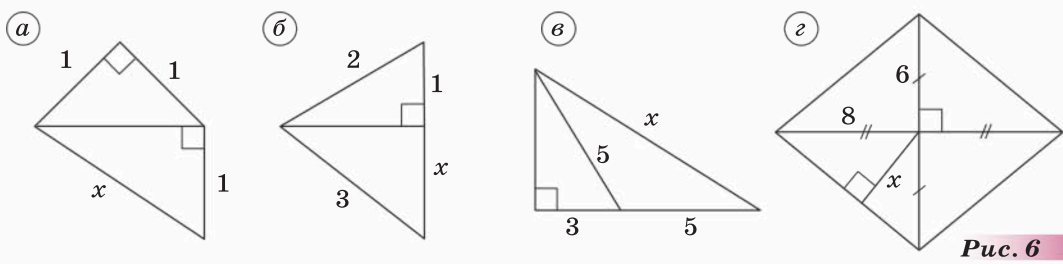


Рис. 6

29 а) Медиана равнобедренного треугольника, проведённая к его основанию, равна 5 см, боковая сторона равна 13 см. Найдите основание этого треугольника.
б) Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, боковая сторона — 10 см. Найдите биссектрису этого треугольника, проведённую к его основанию.

30 Найдите биссектрису равностороннего треугольника, если его сторона равна: а) 5 см; б) a.

31 а) Основание равнобедренного треугольника равно 16 см, медиана, проведённая к основанию, равна 6 см. Чему равен периметр этого треугольника?
б) Периметр равнобедренного треугольника равен 36, боковая сторона — 13. Найдите биссектрису треугольника, проведённую к его основанию.

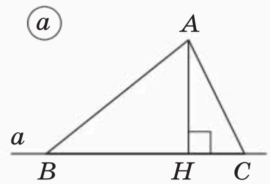
32 а) Найдите периметр ромба, если его диагонали равны 8 и $16\sqrt{2}$.
б) Диагонали параллелограмма равны 12 см и 16 см, а сторона — 10 см. Докажите, что данный параллелограмм является ромбом.

33 а) Сторона ромба равна 13 см, одна из диагоналей ромба — 24 см. Найдите другую диагональ ромба.
б) Диагонали ромба равны 12 см и 16 см. Найдите периметр ромба.

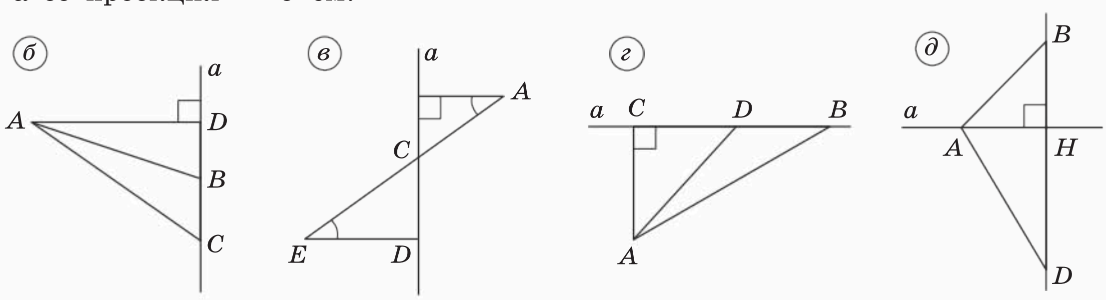
34 а) Лестница соединяет точки A и B и состоит из 20 ступеней. Высота каждой ступени равна 16 см, а длина — 30 см. Найдите расстояние в метрах между точками A и B.
б) Лестница соединяет точки A и B, расстояние между которыми равно 25 м. Высота каждой ступени равна 14 см, а длина — 48 см. Найдите высоту (в метрах), на которую поднимается лестница.

Т **35** На рисунке 7 в каждом случае укажите наклонную и её проекцию на прямую a.

Рис. 7



36 Из точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная. Найдите длину:
а) наклонной, если её проекция равна 24 см, а перпендикуляр — 7 см;
б) перпендикуляра, если наклонная равна 41 см, а её проекция — 9 см.



37 Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны проекции: а) боковых сторон на основание; б) высот к боковым сторонам на основание; в) высоты к основанию на боковые стороны.

К **38** **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

1. Нарисуйте прямую a и точку A, не принадлежащую прямой a. Проведите наклонную AB к прямой a. Как найти её проекцию? Постройте проекцию и обозначьте её BM.
2. Проведите наклонную из точки A к прямой a, меньшую AB; бо́льшую AB. Сколько наклонных можно провести из точки A к прямой a?
3. Есть ли среди этих наклонных равные AB? И если есть, то сколько?
4. Докажите, что бо́льшая наклонная имеет бо́льшую проекцию и наоборот.
5. Докажите, что разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций.

39 Две стороны прямоугольного треугольника равны 3 см и 5 см. Найдите третью сторону. Сколько решений имеет задача?

40 а) Найдите высоту ромба, проведённую из его вершины, если она делит сторону ромба на отрезки длиной 5 см и 3 см, считая от вершины тупого угла.
б) Найдите сторону ромба, если его высота равна 4, а один из углов — 60°.

41 Катеты прямоугольного треугольника равны 8 см и 6 см. Найдите медианы этого треугольника.

42 Стороны треугольника равны 12 см, 16 см и 20 см. Найдите высоту и медиану треугольника, проведённые к большей стороне.

Т **43** а) Из точки к прямой проведены две наклонные длиной 10 см и 17 см. Разность длин их проекций равна 9 см. Найдите эти проекции.
б) Из точки к прямой проведены две наклонные. Сумма длин их проекций равна 21 см, а расстояние от данной точки до прямой равно 8 см. Одна из наклонных равна 10 см. Найдите длину другой наклонной.

44 Найдите высоту, проведённую к большей стороне треугольника, если его стороны равны: а) 21, 17 и 10; б) 25, 29 и 36.

45 а) Одна из боковых сторон прямоугольной трапеции равна 15 см, основания трапеции — 9 см и 18 см. Найдите диагонали трапеции.
б) Основания прямоугольной трапеции равны 8 и 12. Найдите боковые стороны трапеции, если известно, что её бóльшая диагональ равна 13.

46 а) Основания равнобедренной трапеции равны 14 см и 24 см, высота — 12 см. Чему равен периметр трапеции?
б) Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 10 см, высота — 8 см, периметр — 40 см. Найдите основания трапеции.

47 Диагонали прямоугольной трапеции взаимно перпендикулярны, бóльшая из них точкой пересечения делится на отрезки длиной 36 см и 64 см. Найдите основания трапеции.

48 Диагонали параллелограмма равны 8 см и 10 см. Одна из диагоналей параллелограмма перпендикулярна его стороне. Найдите стороны параллелограмма.

49 а) В равнобедренной трапеции основания равны 6 см и 10 см, диагональ делит тупой угол трапеции пополам. Найдите эту диагональ.
б) В прямоугольной трапеции основания 6 см и 9 см, диагональ делит тупой угол трапеции пополам. Найдите эту диагональ.

50 а) В окружности радиуса 10 см проведена хорда AB на расстоянии 6 см от центра. Чему равна её длина?
б) Хорда MN, равная 30 см, находится на расстоянии 8 см от центра окружности. Найдите радиус этой окружности.

51 а) В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 8 см и 16 см. Найдите диаметр окружности, если расстояние между этими хордами равно меньшей из хорд.
б) В окружности по одну сторону от центра проведены две параллельные хорды, одна из них в 2 раза больше другой, равной 12 см. Расстояние между хордами 6 см. Чему равен радиус окружности?

52 а) В равнобедренный треугольник с боковой стороной 13 см и основанием 10 см вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.
б) Найдите сторону равностороннего треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.

53 В прямоугольный треугольник вписана окружность. Найдите периметр треугольника, если:
а) радиус равен 2, а гипотенуза — 13;
б) точка касания делит гипотенузу на отрезки, равные 5 см и 12 см.

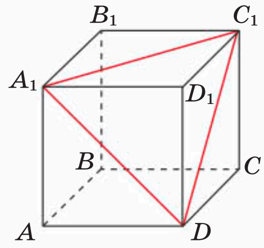


Рис. 8

54 а) Равнобедренный треугольник вписан в окружность радиуса $4\sqrt{3}$ см. Найдите высоту, проведённую к боковой стороне, если один из углов треугольника равен 120°.
б) Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с углом 30° при его основании, если высота, проведённая к боковой стороне, равна $2\sqrt{3}$ см.

К 55 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 5 (рис. *8*). Найдите: а) периметр треугольника A_1C_1D; б) диагональ прямоугольника BB_1D_1D.

К 56 Боковая сторона CD прямоугольной трапеции $ADCD$ образует с её основанием угол 45°. Меньшая боковая сторона трапеции равна 12 см, меньшее основание BC равно 16 см. Вычислите длину: а) проекции диагоналей трапеции на её большее основание; б) проекции боковой стороны на её большее основание.

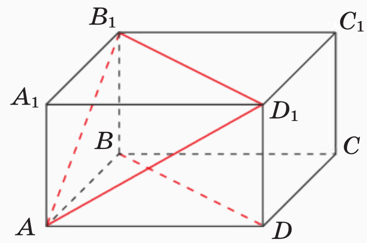


Рис. 9

К 57 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. *9*) $AB = 6$, $AD = 8$, $AA_1 = 4$. Найдите: а) периметр треугольника AB_1D_1; б) диагональ прямоугольника B_1D_1DB.

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке *10*: $AB = BC = CD = DE$. а) Найдите отношения отрезков: $\frac{AB}{AC}$; $\frac{BC}{BE}$; $\frac{AC}{AE}$; $\frac{AD}{BC}$.
б) Найдите отрезки, отношение которых равно: $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{4}{3}$.

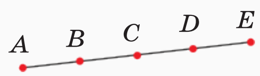


Рис. 10

2. В треугольнике ABC укажите: а) сторону, противолежащую углу A; б) сторону, противолежащую углу B; в) сторону, прилежащую: к углу A; к углу C.
3. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = 10$; $AC = 8$; $BC = 6$. Найдите: а) отношение катета, противолежащего углу A, к гипотенузе; б) отношение катета, прилежащего к углу A, к гипотенузе; в) отношение катета, противолежащего углу B, к катету, прилежащему к углу B.

П. 4.4

Т 58 Треугольник MNP на рисунке *11* — прямоугольный.
а) Используя данные рисунка, выразите: $\sin\alpha$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\sin\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha$.
б) Чему равны отношения: $\frac{PM}{MN}$, $\frac{PN}{MN}$?

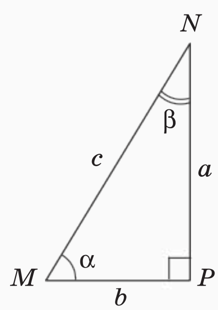


Рис. 11

Т 59 Используя свойства клетчатой бумаги (рис. *12*), найдите: а) $\sin A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$; б) $\sin B$, $\operatorname{tg} B$.

Т 60 а) Используя свойства клетчатой бумаги, найдите синус и котангенс угла, изображённого на рисунке *13*.

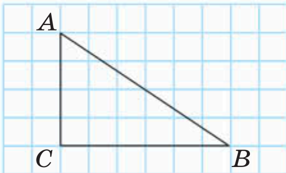


Рис. 12

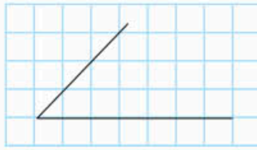


Рис. 13

Рис. 14

б) Используя свойства клетчатой бумаги, найдите косинус и тангенс угла, изображённого на рисунке *14*.

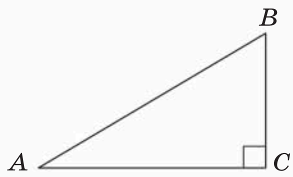


Рис. 15

Т **61** Измерьте стороны треугольника, изображённого на рисунке *15*, и определите: $\operatorname{tg} A$; $\sin A$; $\cos B$; $\cos A$; $\sin B$; $\operatorname{ctg} B$.

К **62** На клетчатой бумаге постройте угол:

а) тангенс которого равен $\frac{2}{3}$; б) котангенс которого равен $\frac{4}{5}$.

К **63** На клетчатой бумаге постройте угол:

а) косинус которого равен $\frac{3}{5}$; б) синус которого равен $\frac{4}{5}$.

64 Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника равны 3 и 1. Найдите:
а) синус угла, противолежащего меньшему катету;
б) косинус угла, прилежащего к большему катету;
в) тангенс меньшего угла треугольника.

К **65** Гипотенуза и катет прямоугольного треугольника равны 10 см и 6 см. Найдите:
а) синус угла, противолежащего большему катету;
б) косинус острого угла, прилежащего к меньшему катету;
в) тангенс угла, противолежащего меньшему катету;
г) котангенс угла, противолежащего большему катету.

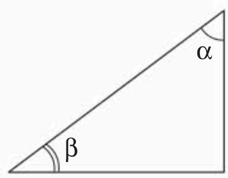


Рис. 16

Т **66** Используя данные рисунка *16*, найдите:

а) $\cos\beta$ и $\operatorname{ctg}\beta$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; б) $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{3}$.

67 В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 24, высота BH равна 5. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла: а) образованного высотой BH с боковой стороной треугольника; б) при основании треугольника.

68 Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла, образованного медианой и высотой, проведёнными к гипотенузе.

69 Косинус угла, образованного боковой стороной равнобедренного треугольника и высотой, проведённой к его основанию длиной 6 см, равен $\frac{1}{2}$. Найдите: а) периметр равнобедренного треугольника; б) синус угла при основании данного треугольника.

70 Найдите углы треугольника, стороны которого равны:
а) 1; $\sqrt{3}$ и 2; б) $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$.

ПОВТОРЯЕМ

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 96 см. Длины его боковой стороны и основания пропорциональны числам 3 и 2. Вычислите длины всех сторон данного треугольника.

2. Докажите, что отрезки, соединяющие середину основания равнобедренного треугольника с серединами его боковых сторон, равны.

3. В треугольнике ABC: $AB = BC = 18$ см, периметр треугольника ABC равен 48 см. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Точки M и N — точки касания этой окружностью сторон AB и BC соответственно. Найдите длины отрезков AM и BN.

П. 4.5

71 Найдите:

а) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8$;

в) $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; г) $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

К **72** Определите, могут ли синус и косинус одного угла одновременно быть равными:

а) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$.

73 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

74 Упростите выражение:

а) $1 - \sin^2\alpha$; б) $1 - \cos^2\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha$; д) $2 + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$; е) $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha}$.

75 Вычислите:

а) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$; б) $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$; в) $\operatorname{tg} 60^\circ \cdot \sin 30^\circ$;

г) $\sqrt{3}\ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ$; д) $\cos 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$; е) $\operatorname{tg} 45^\circ + \sin 30^\circ$.

76 Найдите: а) $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}8$.

77 Пользуясь калькулятором, найдите: $\sin 30^\circ$; $\cos 40^\circ$; $\operatorname{tg} 50^\circ$; $\sin 70^\circ$; $\cos 80^\circ$.

78 В прямоугольном треугольнике один катет равен 12, а синус противолежащего ему угла равен 0,8. Найдите гипотенузу и второй катет.

79 а) Основание равнобедренного треугольника равно 12 см, угол при основании — 30°. Найдите периметр треугольника.

б) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10. Угол между высотой, проведённой к основанию, и боковой стороной равен 60°. Найдите периметр треугольника.

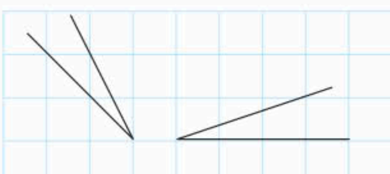


Рис. 17

80 Докажите, что углы на рисунке *17* равны.

ПОВТОРЯЕМ

1. Высота равнобедренной трапеции равна 5 см, больший угол трапеции равен 135°, меньшее основание равно 7 см. Найдите периметр трапеции.
2. В окружности с центром в точке O и радиусом 5 см проведена хорда AB (рис. *18*). Угол AOB равен 60°. а) Найдите длину хорды AB. б) Под какими углами видна эта хорда из точек окружности?

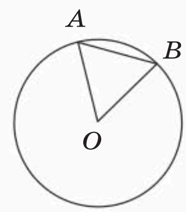


Рис. 18

П. 4.6

81 В прямоугольном треугольнике (рис. *19*) известны катет OM и угол N. Выразите через них гипотенузу и второй катет.

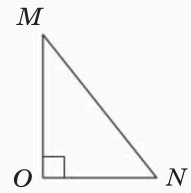


Рис. 19

82 С соседом по парте обсудите утверждения. Укажите верные из них.
1. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна произведению катета на синус противолежащего угла.
2. В прямоугольном треугольнике катет равен произведению тангенса противолежащего ему угла и другого катета.
3. В прямоугольном треугольнике синус острого угла равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.
4. В прямоугольном треугольнике катет равен произведению гипотенузы и косинуса угла, прилежащего к этому катету.
5. В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна отношению катета к синусу противолежащего ему угла.

83 а) В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10 см, а синус одного из острых углов равен 0,3. Найдите катеты этого треугольника.
б) В прямоугольном треугольнике катет, равный 4 см, является противолежащим углу 60°. Найдите гипотенузу треугольника.

84 Решите прямоугольный треугольник по двум катетам, если:
а) $a = 4,\ b = 4\sqrt{3}$; б) $a = 4,\ b = 2\sqrt{5}$.

85 Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету, если:
а) $a = 8,\ c = 10$; б) $b = 15,\ c = 17$.

86 Решите прямоугольный треугольник по катету и острому углу, если:
а) $a = 3,\ \beta = 40°$; б) $a = 5,\ \alpha = 45°$.

87 Решите прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу, если:
а) $c = 10,\ \beta = 50°$; б) $c = 12,\ \alpha = 60°$.

88 а) Угол между диагоналями прямоугольника равен 50°. Найдите стороны прямоугольника, если диагональ равна 10.
б) Стороны прямоугольника равны 6 см и 8 см. Найдите угол между его диагоналями.

К **89** а) Под каким углом к поверхности земли падает солнечный луч, если дерево высотой 10 м отбрасывает тень длиной 4 м?
б) Туристы, проделав путь вверх по холму в 3 км, оказались на 150 м выше подножия холма. Найдите угол подъёма.

К **90** Какой длины должна быть лестница, чтобы она доставала до фронтона дома, высота которого 3,5 м, а рекомендуемый угол наклона лестницы к поверхности земли равен 65°?

91 а) Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°, медиана, проведённая к его основанию, — 6 см. Найдите периметр треугольника.
б) Угол, образованный основанием и высотой равнобедренного треугольника, проведённой к боковой стороне, равен 60°, боковая сторона равна $8\sqrt{3}$. Найдите периметр треугольника.

92 К окружности радиуса 6 см через точку A проведена касательная, отрезок касательной до точки касания равен 8 см. На каком расстоянии точка A находится от центра окружности?

93 а) Основания прямоугольной трапеции равны 8 см и 12 см, тупой угол равен 120°. Найдите периметр трапеции.
б) В прямоугольной трапеции острый угол равен 60°. Высота трапеции равна $8\sqrt{3}$, меньшее основание равно 5. Найдите периметр трапеции.

94 В равнобедренной трапеции угол при основании равен 135°, меньшее основание равно 4, боковая сторона — 8. Найдите среднюю линию трапеции.

95 Основания равнобедренной трапеции равны 8 см и 18 см, боковая сторона равна 10 см. Найдите углы трапеции.

96 а) Диагональ равнобедренной трапеции равна 12 см и составляет угол 60° с бо́льшим основанием. Чему равна длина средней линии трапеции?
б) В равнобедренную трапецию с острым углом 30° вписана окружность радиуса 8 см. Найдите длину средней линии трапеции.

97 Тупой угол параллелограмма равен 150°. Диагональ параллелограмма перпендикулярна его стороне и равна 10 см. Найдите стороны параллелограмма.

К **98** Хорда AB окружности радиуса R видна из центра O под углом α. На каком расстоянии от центра O находится эта хорда?

К **99** С соседом по парте или в команде придумайте задачи, аналогичные задачам № 15–18.

100 а) В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Докажите, что $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot CH$.
б) В тупоугольном треугольнике с тупым углом C проведена высота BH. Докажите, что $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot CH$.

101 а) Во Владивостоке имеется фуникулёр, по которому курсирует трамвай. Длина фуникулёра 183 м, а разница между высшей и низшей точками равна 70 м. Под каким углом к горизонту движется трамвай фуникулёра?
б) Башня Сююмбике казанского Кремля относится к «падающим» башням. Шпиль башни отклонён от вертикали на 1,98 м. Высота башни составляет 58 м. Чему равен угол наклона оси башни? Сравните угол наклона башни Сююмбике с углом наклона Пизанской башни.

1 Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 1, а один из острых углов равен 15°. Найдите катеты прямоугольного треугольника.

2 Докажите, что треугольник является прямоугольным тогда и только тогда, когда сумма квадратов его сторон в 8 раз больше квадрата радиуса описанной около него окружности.

3 В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза $AB = c$. На высоте CH как на диаметре построена окружность. Через вершины A и B к этой окружности проведены касательные, пересекающиеся в точке M. Чему равны отрезки касательных к этой окружности, выходящие из точки M?

4 Точка O — центр описанной около прямоугольного треугольника ABC окружности — принадлежит стороне AB, один из острых углов треугольника равен 30°. Точка M — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Найдите угол MOC.

К 5 Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, разделила данный треугольник на два, в каждый из которых вписана окружность. Расстояние между центрами этих окружностей равно 1. Чему равен радиус окружности, вписанной в исходный треугольник?

К 6 Точка H — ортоцентр треугольника, вписанного в окружность. Из произвольной точки M окружности к прямым, содержащим стороны треугольника, проведены перпендикуляры. Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на прямой, проходящей через середину отрезка MH (эта прямая называется прямой Симсона).

7 Две стороны четырёхугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей равна 2 и делит четырёхугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырёхугольника.

8 В треугольнике ABC сторона AB равна 1, а длина стороны BC выражается целым числом. Биссектриса угла A перпендикулярна медиане, выходящей из вершины B. Найдите периметр треугольника.

9 Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит высоту, проведённую к основанию, на отрезки длиной 16,5 см и 27,5 см. Найдите отрезки, на которые эта биссектриса делит боковую сторону треугольника.

К 10 Боковая сторона равнобедренного треугольника относится к основанию как $5:6$. Биссектриса угла при основании делит высоту, проведённую к основанию, на отрезки, разность которых составляет 4 см. Найдите периметр треугольника.

11 Около прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) описана окружность. CH — высота треугольника. Окружность с центром в точке H проходит через середину дуги AB и пересекает отрезок AB в точке M. Найдите CM, если $AB = c$.

12 Диагонали вписанного в окружность четырёхугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что сумма квадратов двух противоположных сторон четырёхугольника равна квадрату диаметра описанной окружности.

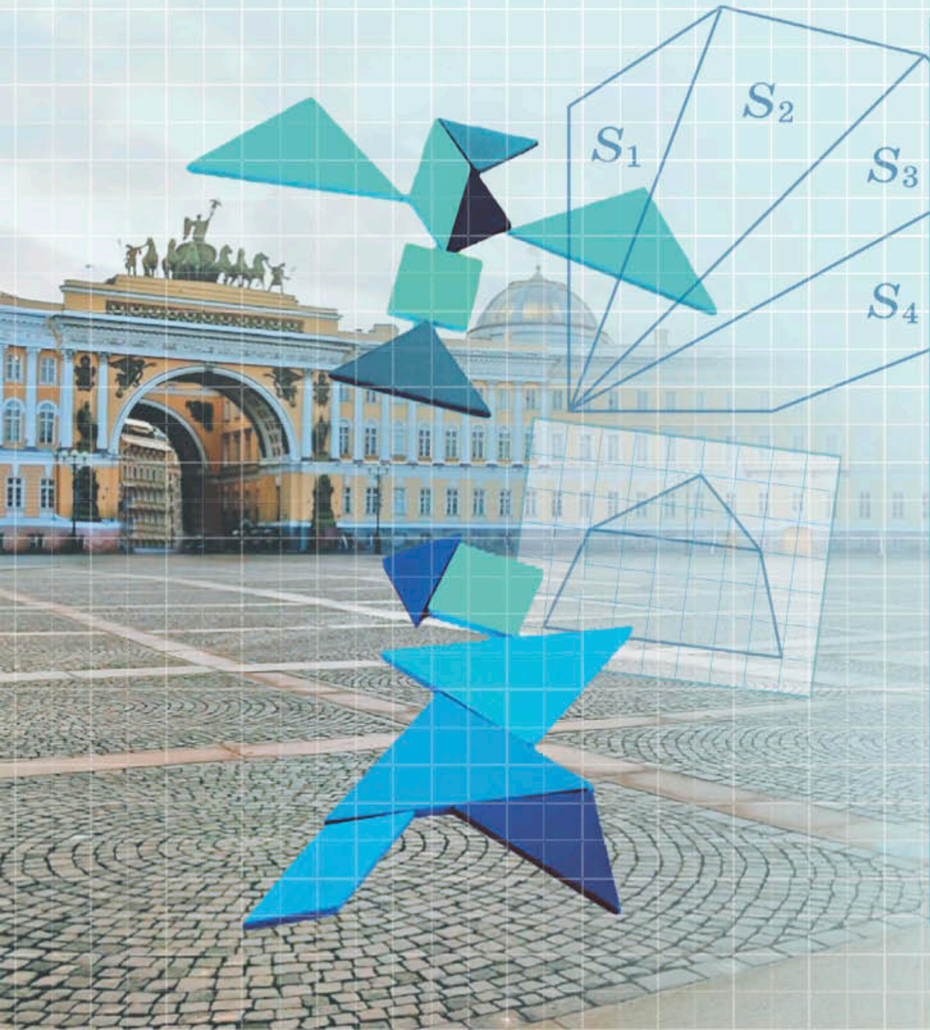
К 13 Основания трапеции равны 10 и 20, боковые стороны — 6 и 8. Найдите радиус окружности, проходящей через концы меньшей боковой стороны и касающейся прямой, содержащей другую боковую сторону.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Докажите утверждение о том, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, разделяет треугольник на подобные треугольники.
- Сформулируйте и докажите утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике.
- Что называют средним геометрическим двух отрезков?
- Что называют средним арифметическим двух отрезков?
- Докажите, что катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.
- Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.
- Каково соотношение между средним геометрическим и средним арифметическим двух отрезков? Докажите его.
- Сформулируйте и докажите теорему Пифагора.
- Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме Пифагора.
- Докажите, что гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника в $\sqrt{2}$ раз больше его катета.
- Приведите примеры прямоугольных треугольников, длины сторон которых измеряются целыми числами.
- Докажите, что любая наклонная больше перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой.
- Что называется синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом острого угла прямоугольного треугольника?
- Выразите катет прямоугольного треугольника через: а) гипотенузу и противолежащий острый угол; б) гипотенузу и прилежащий острый угол; в) другой катет и противолежащий острый угол.
- Какое равенство называют основным тригонометрическим тождеством?
- Какие ещё тригонометрические тождества вам известны?
- Чему равны значения синуса, косинуса и тангенса для углов $30°$, $45°$, $60°$? Ответ обоснуйте.
- Что означает фраза «Решить прямоугольный треугольник»?

ГЛАВА 5 ПЛОЩАДЬ

- ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА
- ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА
- ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА
- ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА
- ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ
- МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ



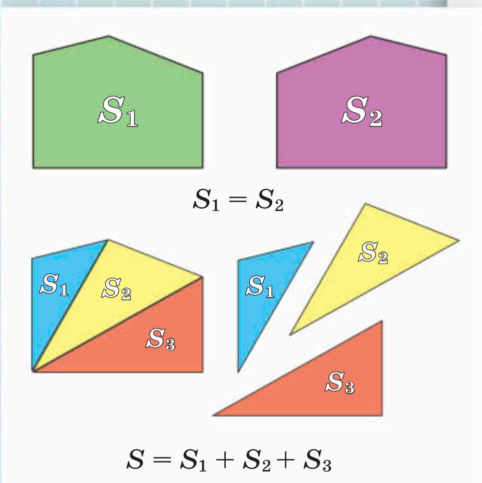
ИНТЕРЕСНО

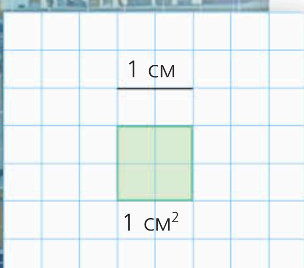
Герона Александрийского, древнегреческого механика и математика, относят к величайшим инженерам за всю историю человечества. Около двух тысяч лет назад он изобрёл автоматические двери, автоматический театр марионеток, автомат для продажи воды, скорострельный самозаряжающийся арбалет, паровую турбину, прибор для измерения протяжённости дорог (древний одометр), первый теодолит и др. Герон создал и первое программируемое устройство — вал со штырьками и намотанной на него верёвкой. В трактате «Механика» Герон описал пять типов простейших машин — рычаг, ворот, клин, винт и блок, установил «золотое правило механики», согласно которому выигрыш в силе при использовании простых механизмов сопровождается потерей в расстоянии. В геометрии известны целочисленные героновы треугольники, его формулы для вычисления площадей правильных многоугольников, объёмов правильных многогранников, пирамиды, конуса, усечённого конуса, тора, шарового сегмента.

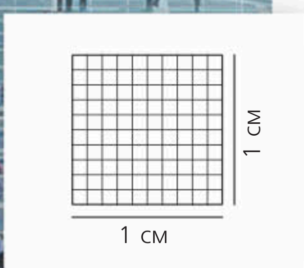
5.1 ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют площадью многоугольника
- Единицы измерения площади
- Какие фигуры называются равновеликими, какие – равносоставленными







У каждого из нас есть представление о площади. Мы легко можем найти площадь своей комнаты, если она имеет форму прямоугольника. А чтобы найти площадь всей квартиры, складываем площади всех её помещений. Мы знаем, что одинаковые квартиры имеют одну и ту же площадь. И каждый из нас понимает, что означают фразы: «площадь квартиры равна 72 квадратным метрам» или «школьная территория составляет 2 гектара».
А что понимают под площадью многоугольника в геометрии?

ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА Многоугольник занимает некоторую часть плоскости. Под площадью многоугольника понимают величину той части плоскости, которую занимает многоугольник.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Площадью многоугольника** называется положительная величина, обладающая такими свойствами:

1) площади равных фигур равны;
2) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;
3) площадь квадрата равна квадрату его стороны.

Обозначают площадь буквой S.

Свойства 1 и 2 называются **основными свойствами площади.**

Измерение площади состоит в сравнении площади данного многоугольника с площадью фигуры, принятой за единицу измерения. В результате получается **численное значение** площади данного многоугольника. Это число показывает, сколько раз единица измерения и её части укладываются в данном многоугольнике.

За **единицу измерения** площадей принимают квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков, то есть площадь квадрата со стороной, равной 1 единице длины, равна 1 единице площади, или 1 квадратной единице.

Например, если за единицу измерения длины принимается 1 метр, 1 сантиметр или 1 миллиметр, тогда за единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна соответственно 1 м, 1 см или 1 мм. Такой квадрат называется квадратным метром, квадратным сантиметром или квадратным миллиметром и обозначается соответственно 1 м^2, 1 см^2, 1 мм^2.

Так как, например, 1 см = 10 мм, то

$$1 \text{ см}^2 = 10 \cdot 10 \text{ мм}^2 = 100 \text{ мм}^2.$$

В прямоугольнике на рисунке *5.1* квадратный сантиметр укладывается 8 раз.

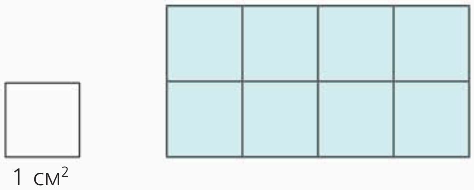


Рис. 5.1

Значит, площадь этого прямоугольника равна 8 квадратным сантиметрам. Записывается это так: $S = 8$ см^2.

Квадрат, принятый за единицу измерения площадей, может не уложиться целое число раз в многоугольнике, как, например, на рисунке *5.2*.

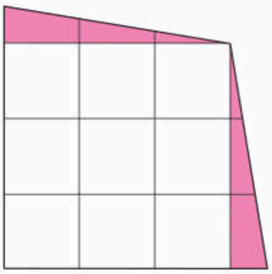


Рис. 5.2

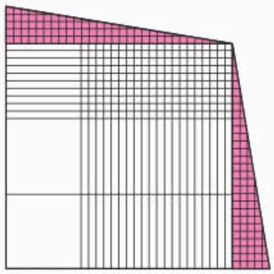


Рис. 5.3

В этом случае можно сказать, что площадь многоугольника приближённо равна 9 см^2. Для получения более точного результата единицу измерения делят на 100 частей и находят, сколько таких частей укладывается в остатке (рис. *5.3*). Одна сотая часть квадратного сантиметра — квадратный миллиметр — укладывается в остатке полностью 116 раз, значит, площадь многоугольника приближённо равна 10,16 см^2. Получили более точное приближение.

Если необходимо ещё более точное приближение, то единичные квадраты разбивают на 10000 квадратов со стороной, равной одной сотой сантиметра, и повторяют описанную процедуру.

Процесс измерения площади можно продолжать всё дальше и дальше, получая всё более точное приближение.

Таким образом, описанный процесс измерения позволяет выразить площадь данного многоугольника некоторым положительным числом, показывающим, сколько раз единица измерения и её части укладываются в этом многоугольнике.

Но на практике такой процесс неудобен.

Обычно для нахождения площади используют формулы, позволяющие вычислять площадь многоугольника по его отдельным элементам (сторонам, высотам, углам).

РАВНОСОСТАВЛЕННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ На рисунке *5.4* многоугольники имеют равные площади.

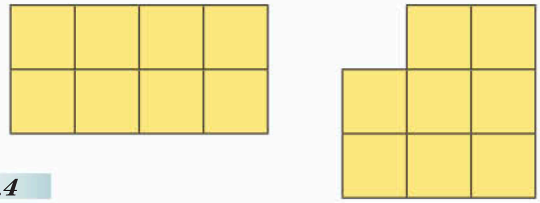


Рис. 5.4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Многоугольники, имеющие равные площади, называют **равновеликими**.

На рисунке *5.5* изображены два равных многоугольника.

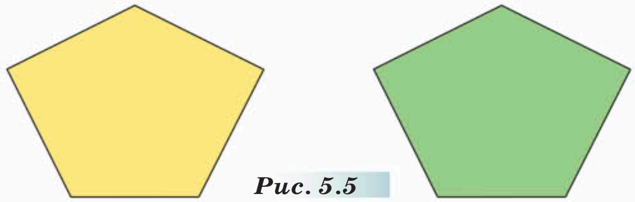


Рис. 5.5

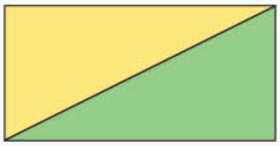


Рис. 5.6

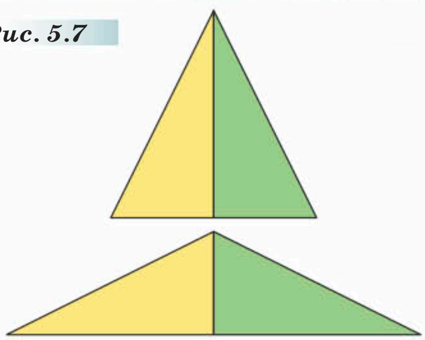
Из определения площади следует, что **равные многоугольники являются равновеликими**.

Но равновеликие многоугольники не всегда равны. В этом легко убедиться, посмотрев на рисунок *5.4*.

Начертите прямоугольник и проведите его диагональ. Как вы знаете, диагональ разбивает прямоугольник на два равных прямоугольных треугольника (рис. *5.6*). Вырежите эти треугольники и, прикладывая их равными сторонами друг к другу, составьте различные многоугольники.

Вы получите равнобедренные треугольники (рис. *5.7*), параллелограмм (рис. *5.8*), дельтоид — четырёхугольник с попарно равными сторонами (рис. *5.9*).

Рис. 5.7



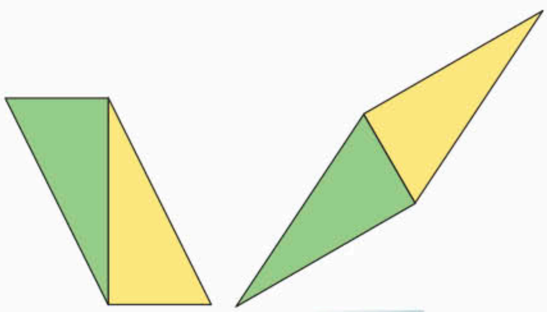


Рис. 5.8

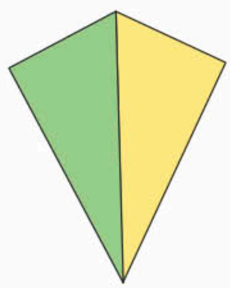
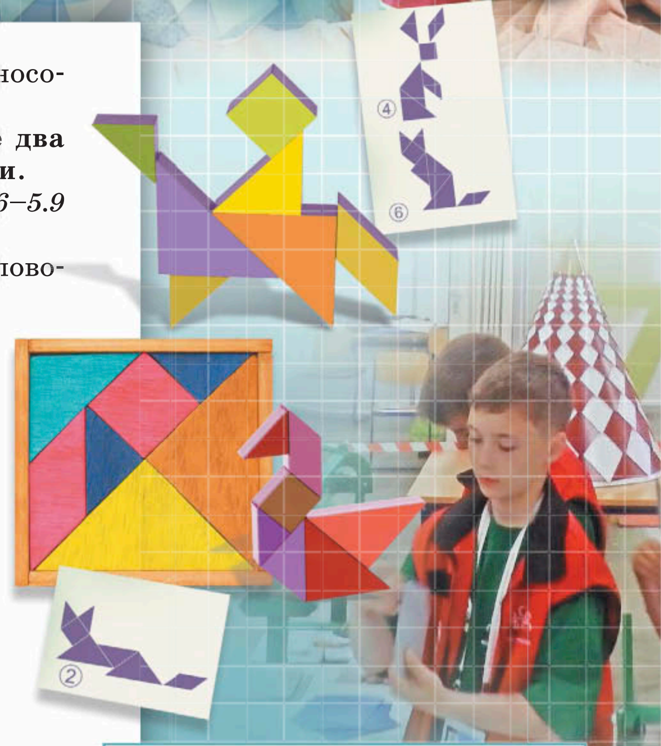


Рис. 5.9

Если один многоугольник разрезан на части и из этих частей составлен другой многоугольник (при этом внутренние области любых двух частей не имеют общих точек), то такие многоугольники называют **равносоставленными**.



Многоугольники на рисунках *5.6–5.9* — равносоставленные.

Из определения площади следует, что **любые два равносоставленных многоугольника равновелики.**

Таким образом, многоугольники на рисунках *5.6–5.9* равновелики.

Рассмотрим ещё один пример — известную головоломку «Танграм».

Фигурки, полученные комбинацией всех частей «Танграма», — равносоставленные, следовательно, они равновелики и их площадь равна площади исходного квадрата.

Верно и обратное утверждение: любые два равновеликих многоугольника — равносоставленные.

ПАРКЕТЫ Плоскость покрывают многоугольниками таким образом, чтобы любые два из этих многоугольников либо имели общую сторону, либо имели общую вершину, либо не имели общих точек. Такое покрытие плоскости называется **паркетом**.

Примерами паркета служит покрытие или, другими словами, заполнение плоскости равными квадратами или равносторонними треугольниками.

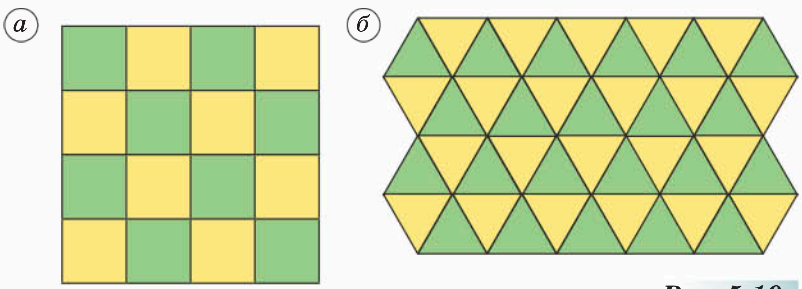


Рис. 5.10

Оказывается, можно составить паркет из произвольных равных между собой четырёхугольников. Два таких паркета изображены ниже.

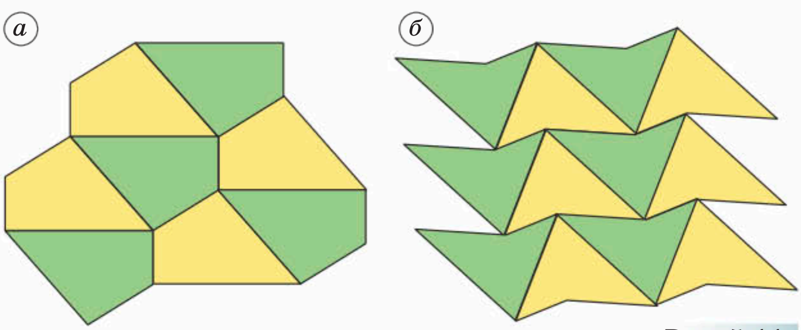


Рис. 5.11

Попробуйте с друзьями, начертив произвольный четырёхугольник, составить паркет из равных ему четырёхугольников.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют площадью многоугольника?
- Что значит измерить площадь многоугольника?
- Что принимают за единицу измерения площади?
- Что показывает численное значение площади?
- Сформулируйте основные свойства площади.
- Какие многоугольники называются равновеликими?
- Можно ли утверждать, что если два многоугольника равны, то они равновелики?
- Можно ли утверждать, что если два многоугольника равновелики, то они равны?
- Какие многоугольники называются равносоставленными?
- Что можно сказать про площади равносоставленных многоугольников?
- Выразите 1 $м^2$ в квадратных сантиметрах; в квадратных дециметрах.
- Сколько квадратных метров содержит дачный участок площадью 9 соток?

5.2 ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Доказательство формулы площади прямоугольника
- Чему равна площадь прямоугольного треугольника

Конечно, вы знаете, что, для того чтобы найти площадь прямоугольника, нужно его длину умножить на его ширину (длиной и шириной называют смежные стороны прямоугольника). Теперь мы можем это доказать.

ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Теорема. Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AD = a$ и $AB = b$ и докажем, что его площадь S равна ab (рис. 5.12, *а*).

Рассмотрим сначала прямоугольник AB_1C_1D со стороной AB_1, равной единице измерения отрезков (рис. 5.12, *б*).

Понятно, что единичный квадрат — единица измерения площадей — и его части укладываются в прямоугольнике AB_1C_1D столько раз, сколько раз единица измерения отрезков и её части укладываются в отрезке AD, то есть a раз. Следовательно, площадь прямоугольника AB_1C_1D выражается числом a.

А прямоугольник AB_1C_1D и его части укладываются в прямоугольнике $ABCD$ столько раз, сколько раз единица измерения отрезков и её части укладываются в отрезке AB, то есть b раз (рис. 5.12, *в*).

Тогда площадь прямоугольника $ABCD$ отличается от площади прямоугольника AB_1C_1D в b раз, то есть она равна ab. ▼

Формулу площади прямоугольника записывают так:

$$S = ab.$$

Из теоремы о площади прямоугольника следует теорема о площади прямоугольного треугольника.

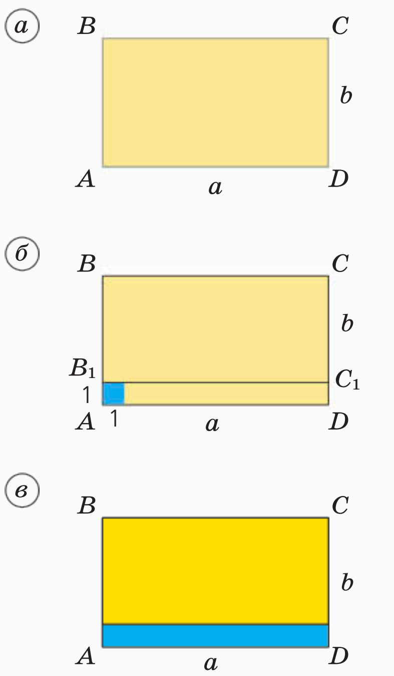
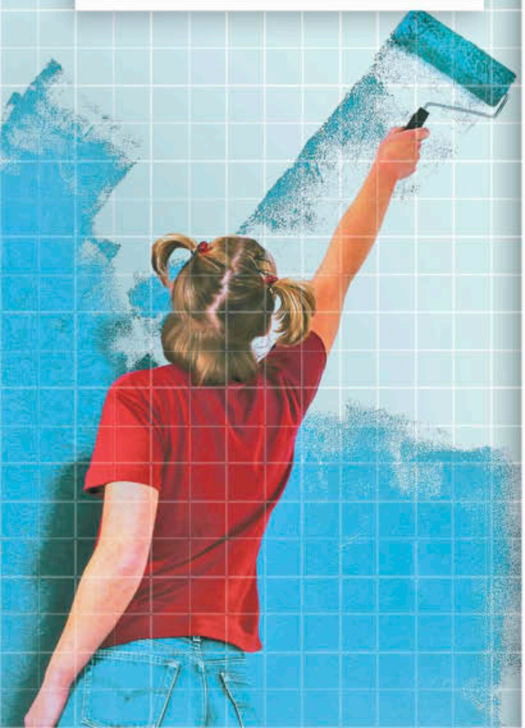


Рис. 5.12



ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Следствие. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами a и b (рис. 5.13).

Докажем, что его площадь равна $\frac{1}{2}ab$.

Рассмотрим прямоугольник со сторонами a и b и проведём его диагональ (рис. 5.14). Диагональ разделила

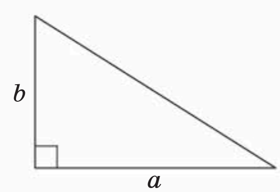


Рис. 5.13

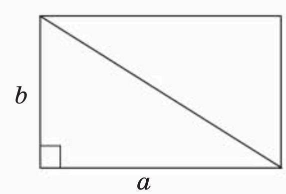


Рис. 5.14

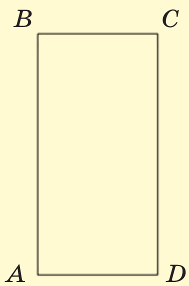
прямоугольник на два равных треугольника с катетами a и b. Значит, площадь одного треугольника будет равна половине площади прямоугольника, то есть $\frac{1}{2}ab$.

Каждый из полученных в прямоугольнике треугольников равен данному треугольнику по двум катетам. Следовательно, площади этих треугольников равны. Тогда площадь S данного треугольника выражается формулой:

$$S = \frac{1}{2}ab.$$ ▼

Задача 1. Определите, какой длины нужен забор, чтобы огородить участок прямоугольной формы площадью 8 соток, если одна сторона участка в 2 раза больше другой.

Решение. Участок имеет форму прямоугольника. Длина забора будет равна периметру этого прямоугольника.



Пусть прямоугольник $ABCD$ — схематический рисунок участка.

Пусть меньшая сторона $AB = x$ м, тогда $BC = 2x$ м.

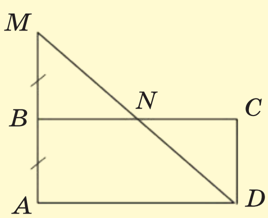
$S_{ABCD} = AB \cdot BC = x \cdot 2x = 2x^2$ (м^2).

Площадь участка — 8 соток, или 800 м^2 (1 сотка = 100 м^2). Получаем уравнение: $2x^2 = 800$.

Решая его, получим, что $x = 20$, то есть меньшая сторона прямоугольника 20 м, а большая 40 м. Тогда $P_{ABCD} = 2\,(20 + 40) = 120$ м.

Ответ: нужен забор длиной 120 м.

Задача 2. Сторону AB прямоугольника $ABCD$ продолжили за точку B на отрезок BM, равный отрезку AB. Точки M и D соединили отрезком. Найдите площадь треугольника AMD, если $AB = 4$ см, $BC = 7$ см.



Решение.

$ABCD$ — прямоугольник, значит, $\angle A = 90°$, тогда треугольник AMD — прямоугольный.

$AD = BC = 7$ см как противоположные стороны прямоугольника. Так как $AB = BM$, то

$$AM = 2AB = 2 \cdot 4 = 8 \text{ (см)}.$$

$$S_{AMD} = \frac{1}{2}AM \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = 28 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 28 см^2.

Обсудите с соседом по парте эту задачу и предложите другой способ её решения.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Докажите соседу по парте, что площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон.
- Какую площадь занимает лист бумаги формата А4? А какую площадь занимает учебник геометрии?
- Чему равна площадь прямоугольного треугольника?
- Определите, какое количество плиток размером 40×40 см потребуется, чтобы выложить пол медицинского кабинета вашей школы.

5.3 ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Формулу площади параллелограмма
- Формулу площади ромба

С помощью формулы площади прямоугольника получим формулу площади параллелограмма.

ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, не являющийся прямоугольником.

Теорема. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна S. За основание примем сторону AD и проведём высоту BH (рис. 5.15).

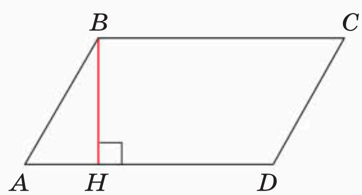


Рис. 5.15

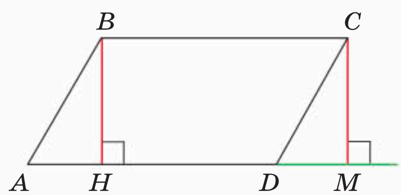


Рис. 5.16

Докажем, что $S = AD \cdot BH$.

Проведём ещё одну высоту — CM (рис. 5.16), получим прямоугольник $HBCM$. Докажем, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна площади прямоугольника $HBCM$.

Прямоугольник $HBCM$ состоит из трапеции $HBCD$ и треугольника DCM. Параллелограмм $ABCD$ состоит из треугольника ABH и той же трапеции $HBCD$.

Прямоугольные треугольники ABH и DCM равны по гипотенузе и острому углу ($AB = CD$ как противоположные стороны параллелограмма; $\angle BAH = \angle CDM$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми AB и CD и секущей AD). Следовательно, равны и площади этих треугольников.

Тогда параллелограмм $ABCD$ и прямоугольник $HBCM$ являются равносоставленными многоугольниками, а значит, их площади равны, то есть

$$S_{ABCD} = S_{HBCM} = HM \cdot BH.$$

Так как $HM = BC = AD$, то

$$S_{ABCD} = AD \cdot BH. \blacktriangledown$$

Мы рассмотрели случай, когда в параллелограмме $ABCD$ основание высоты H принадлежит внутренней точке стороны AD. Теорема справедлива и в случаях, когда основание высоты H не принадлежит стороне AD (рис. 5.17) или совпадает с вершиной D (рис. 5.18). Докажите теорему в этих случаях самостоятельно.

Рис. 5.17

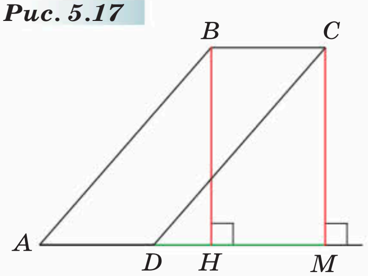
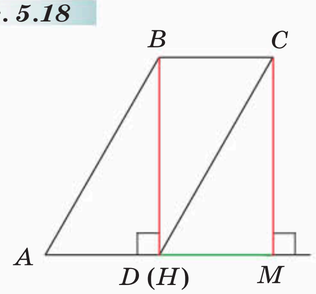


Рис. 5.18



Если обозначить длину стороны параллелограмма буквой a, а длину высоты, проведённой к этой стороне, — h, то формула площади параллелограмма примет вид

$$S = ah.$$

Задача. Высоты параллелограмма равны 5 см и 3 см, а его площадь 45 см^2. Чему равен периметр параллелограмма?

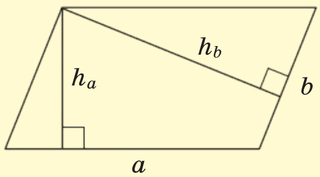
Решение. Обозначим смежные стороны параллелограмма a и b, а высоты, проведённые к этим сторонам, — h_a и h_b соответственно.

За основание параллелограмма мы можем принять любую из сторон, тогда площадь параллелограмма можно записать или так:

$$S = ah_a, \qquad (1)$$

или так:

$$S = bh_b. \qquad (2)$$



Из формулы (1) $a = \frac{S}{h_a} = \frac{45}{3}$ см $= 15$ см.

Из формулы (2) $b = \frac{S}{h_a} = \frac{45}{5}$ см $= 9$ см.

Тогда периметр параллелограмма:

$$P = 2\,(a + b) = 2\,(15 + 9) \text{ см} = 48 \text{ см}.$$

Ответ: 48 см.

ПЛОЩАДЬ РОМБА Ромб является частным видом параллелограмма, поэтому его площадь можно вычислять по формуле площади параллелограмма. Но для вычисления площади ромба есть ещё одна формула.

Теорема. Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

Доказательство. В ромбе $ABCD$ (рис. *5.19*) BD и AC — диагонали. Докажем, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Диагонали ромба перпендикулярны и разбивают ромб на 4 равных прямоугольных треугольника:

$$\triangle AOB = \triangle COB = \triangle COD = \triangle AOD.$$

Значит,

$$S_{AOB} = S_{COB} = S_{COD} = S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD.$$

Тогда $S_{ABCD} = 4S_{AOD} = 4 \cdot \frac{1}{2} AO \cdot OD = 2AO \cdot OD.$

Так как $AO = \frac{1}{2} AC$, $OD = \frac{1}{2} BD$, то

$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AC \cdot BD. \;▼$$

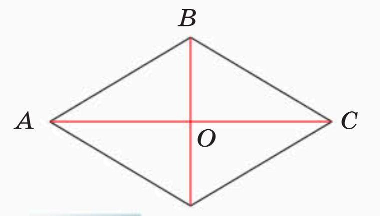


Рис. 5.19

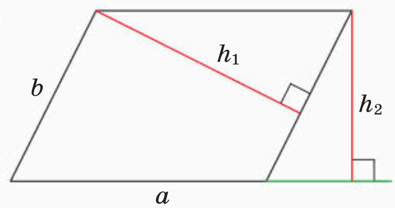


Рис. 5.20

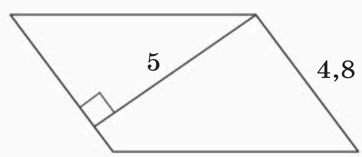


Рис. 5.21

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют основанием и что — высотой параллелограмма?
- Чему равна площадь параллелограмма? Докажите своё утверждение.
- Как можно записать формулу площади параллелограмма, изображённого на рисунке *5.20*?
- Вычислите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке *5.21*.
- По каким формулам можно вычислить площадь ромба? Докажите соседу по парте теорему о площади ромба.

5.4 ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Формулы, по которым вычисляют площадь треугольников
- Чему равно отношение площадей подобных треугольников

Треугольник – ключевая фигура геометрии. В задачах часто требуется найти площадь того или иного треугольника. Поэтому важно знать формулы площади треугольника и уметь ими пользоваться.

ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА Назовём одну из сторон треугольника основанием и проведём к основанию высоту.

ТЕОРЕМА. Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.

Доказательство. В треугольнике ABC примем сторону AC за основание и проведём к основанию высоту BH (рис. 5.22). Докажем, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.

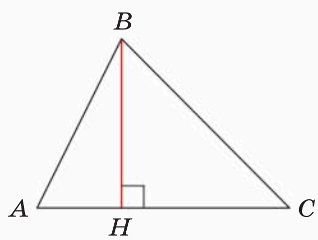


Рис. 5.22

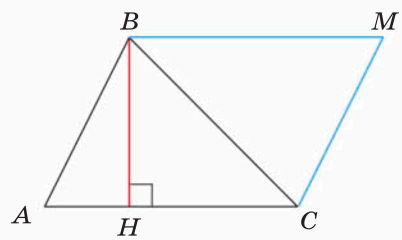


Рис. 5.23

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABMC$, проведя прямые через точки B и C параллельно сторонам треугольника AC и AB соответственно (рис. 5.23).

Диагональ BC делит параллелограмм $ABMC$ на два равных треугольника ABC и MCB, следовательно, треугольники ABC и MCB равновелики. Значит, площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма $ABMC$.

Высота BH и основание AC треугольника ABC являются также высотой и основанием параллелограмма $ABMC$, отсюда

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH. \quad ▼$$

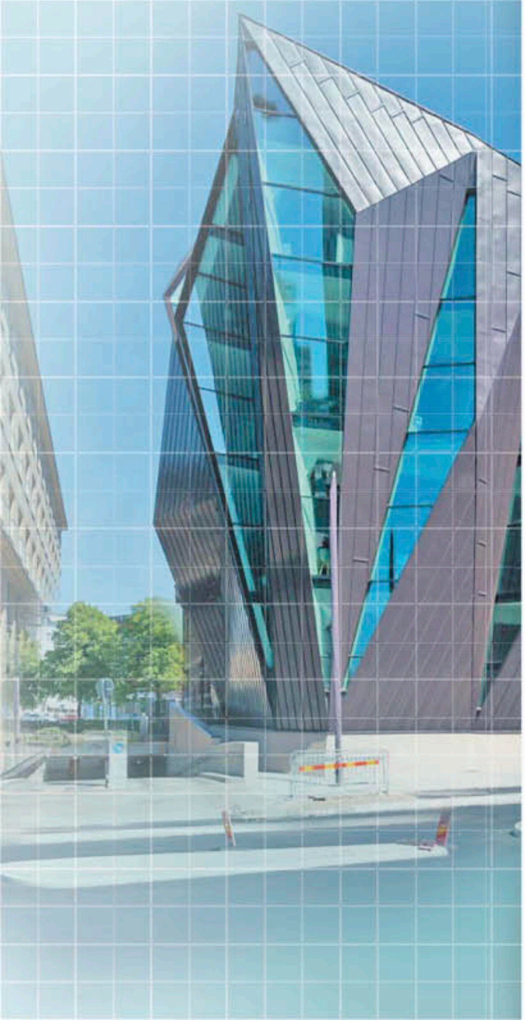
Если основание треугольника обозначить буквой a, высоту — h, то формула площади треугольника примет вид:

$$S = \frac{1}{2} ah.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Площадь треугольника равна половине произведения двух любых его сторон на синус угла между ними.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. Докажем, что $S_{ABC} = AC \cdot AB \cdot \sin A$.

В треугольнике ABC (рис. 5.22): BH — высота. Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH$.



Из прямоугольного треугольника ABH имеем:

$$BH = AB \cdot \sin A.$$

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A.$

Мы рассмотрели случай, когда угол A — острый. Формула справедлива и в случае, когда угол A — тупой или прямой. ▼

Следствие 2. **Площадь равностороннего треугольника со стороной a вычисляется по формуле**

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Следствие 3. **Если высоты двух треугольников равны, то отношение их площадей равно отношению их оснований.**

Следствие 4. **Если основания двух треугольников равны, то отношение их площадей равно отношению их высот, проведённых к этим основаниям.**

Докажите эти следствия самостоятельно.

Герон Александрийский (вторая половина I в. н. э.) — греческий математик и механик. Занимался геометрией, механикой, гидростатикой, оптикой

ФОРМУЛА ГЕРОНА Докажем ещё одну формулу, называемую формулой Герона, выражающую площадь треугольника через длины его сторон.

Теорема. **Площадь треугольника со сторонами a, b и c выражается формулой**

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр треугольника.

Доказательство. Пусть дан треугольник ABC, в котором углы A и C — острые (в любом треугольнике два угла обязательно острые). В этом случае основание высоты, проведённой из вершины B, будет принадлежать внутренней точке стороны AC (рис. 5.24).

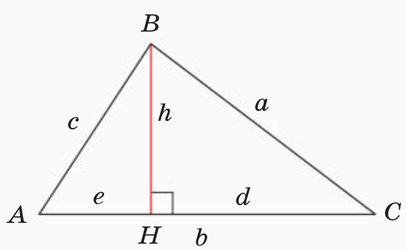


Рис. 5.24

Высота BH разделила треугольник ABC на два прямоугольных треугольника — ABH и CBH.

Пусть $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $BH = h$, $AH = e$, $HC = d$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Треугольник ABH — прямоугольный. По теореме Пифагора

$$h^2 = c^2 - e^2.$$

Треугольник CBH также прямоугольный. По теореме Пифагора

$$h^2 = a^2 - d^2.$$

Таким образом,

$$c^2 - e^2 = a^2 - d^2, \text{ то есть } d^2 - e^2 = a^2 - c^2,$$

или $(d - e)(d + e) = a^2 - c^2$, а так как $d + e = b$, (1)

то $(d - e)\,b = a^2 - c^2$, отсюда $d - e = \dfrac{a^2 - c^2}{b}$. (2)

Сложив почленно равенства (1) и (2), получим

$$2d = b + \frac{a^2 - c^2}{b}, \text{ отсюда } d = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}.$$

$$h^2 = a^2 - d^2 = (a - d)(a + d) =$$

$$= \left(a - \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}\right)\left(a + \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2b}\right) =$$

$$= \frac{2ab - b^2 - a^2 + c^2}{2b} \cdot \frac{2ab + b^2 + a^2 - c^2}{2b} = \frac{c^2 - (a - b)^2}{2b} \cdot \frac{(a + b)^2 - c^2}{2b} =$$

$$= \frac{(c - a + b)(c + a - b)}{2b} \cdot \frac{(a + b - c)(a + b + c)}{2b} =$$

$$= \frac{(a + b + c - 2a)(c + a + b - 2b)(a + b + c - 2c)(a + b + c)}{4b^2} =$$

$$= \frac{(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c) \cdot 2p}{4b^2} =$$

$$= \frac{16p\,(p - a)(p - b)(p - c)}{4b^2} = \frac{4p\,(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2}.$$

Тогда $h = \sqrt{\dfrac{4p\,(p - a)(p - b)(p - c)}{b^2}} = \dfrac{2\sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}}{b}.$

$$S = \frac{1}{2}\,b \cdot h = \frac{2b\sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}}{2b} =$$

$$= \sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)}\,. \ ▼$$

Выведем ещё одну формулу площади треугольника.

Теорема. Площадь треугольника равна произведению полупериметра треугольника и радиуса вписанной в треугольник окружности.

Доказательство. Пусть в треугольник ABC вписана окружность (рис. 5.25).

Обозначим радиус окружности буквой r, полупериметр треугольника — p. Докажем, что $S = pr$.

Радиус окружности, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной, тогда радиусы ON, OP, OM являются одновременно и высотами треугольников AOB, BOC и AOC соответственно. Отсюда:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}\,AB \cdot ON = \frac{1}{2}\,AB \cdot r.$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}\,BC \cdot OP = \frac{1}{2}\,BC \cdot r.$$

$$S_{AOC} = \frac{1}{2}\,AC \cdot OM = \frac{1}{2}\,AC \cdot r.$$

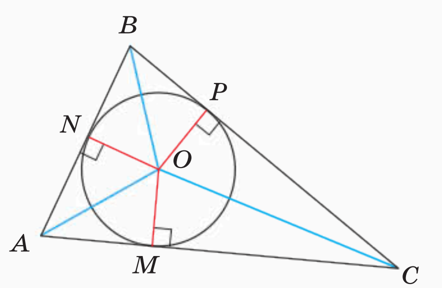
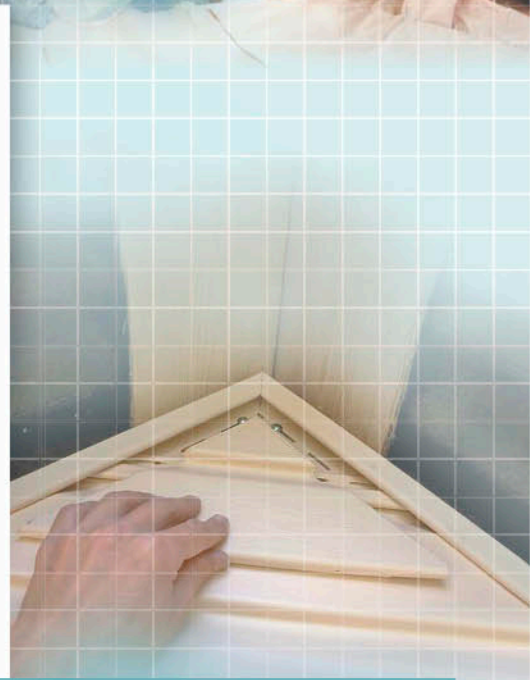


Рис. 5.25



$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r =$$
$$= \frac{1}{2}(AB + BC + AC)\, r = pr.$$

Таким образом, $\boldsymbol{S = pr}$,

где p — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в треугольник окружности.

ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ Вы уже знаете, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия. А чему равно отношение площадей подобных треугольников?

ТЕОРЕМА. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство. Пусть нам даны два подобных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия k (рис. *5.26*). Докажем, что

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2.$$

Проведём в данных треугольниках высоты CH и C_1H_1.

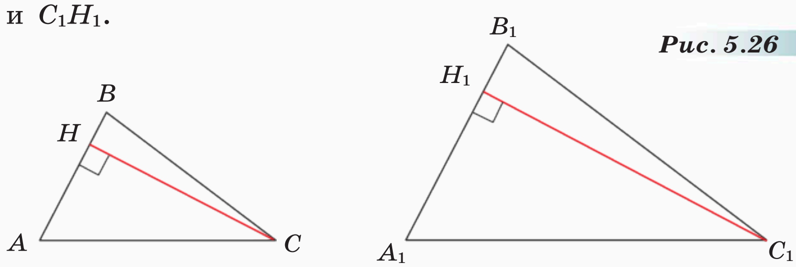


Рис. 5.26

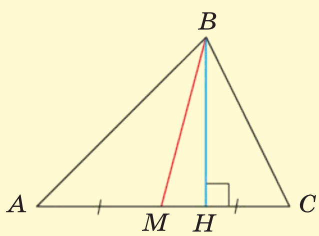
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, значит, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CH}{C_1H_1} = k$. Отсюда $AB = kA_1B_1$, $CH = kC_1H_1$. Так как $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot CH$, $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}A_1B_1 \cdot C_1H_1$, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot C_1H_1} = \frac{\frac{1}{2}kA_1B_1 \cdot kC_1H_1}{\frac{1}{2}A_1B_1 \cdot C_1H_1} = k^2. ▼$$

Задача. Доказать, что медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.

Решение. Пусть BM — медиана треугольника ABC. Проведём высоту BH треугольника ABC. Отрезок BH является высотой одновременно треугольника ABM и треугольника MBC. Так как основания AM и MC этих треугольников равны, получаем:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot BH =$$
$$= \frac{1}{2}MC \cdot BH = S_{MBC}.$$

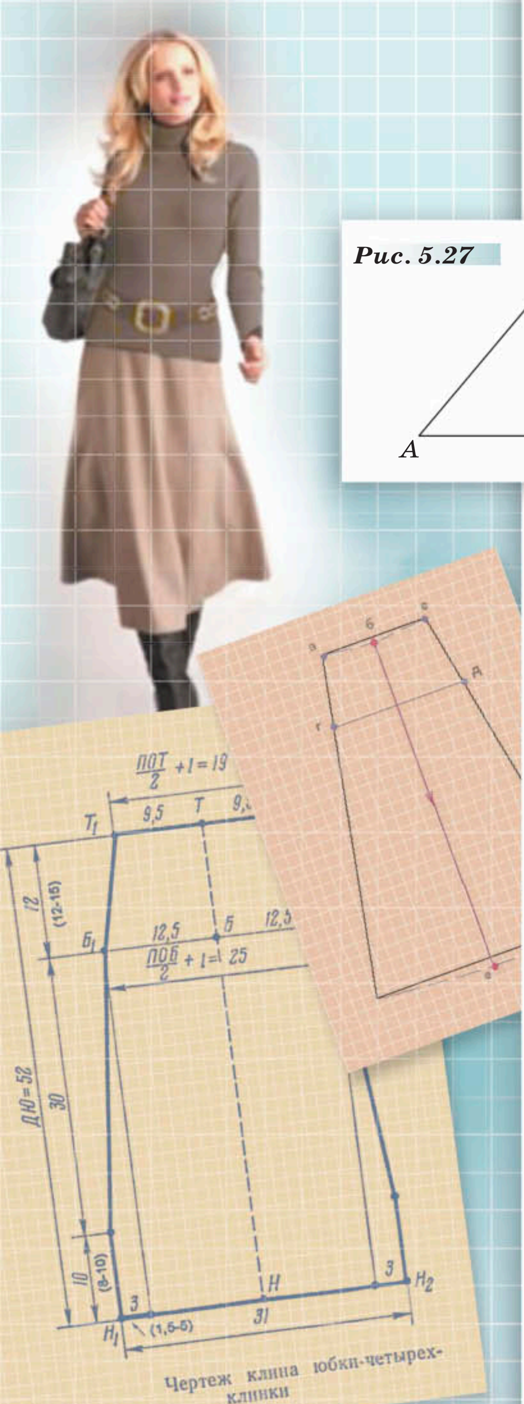


ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какая из сторон может быть основанием треугольника?
- Какую из высот называют высотой треугольника, если выбрано основание?
- Сформулируйте и докажите друг другу теоремы о площади треугольника.
- По какой формуле целесообразно вычислять площадь прямоугольного треугольника, если известны:
  а) длины двух катетов?
  б) длины гипотенузы и проведённой к ней высоты?
- По какой формуле можно вычислять площадь равностороннего треугольника? Ответ обоснуйте.
- Два равновеликих треугольника имеют равные высоты. Означает ли это, что равны основания этих треугольников?
- Площадь треугольника ABC равна S. Чему равна площадь параллелограмма $ABCD$, три вершины которого совпадают с вершинами данного треугольника?
- Чему равно отношение площадей подобных треугольников? Докажите друг другу соответствующую теорему.

5.5 ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- Формулы площади трапеции
- Как находить площадь произвольного многоугольника



В основе доказательства теоремы о площади трапеции лежит следующее свойство площади: если многоугольник состоит из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

ТЕОРЕМА. Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты.

Доказательство. На рисунке 5.27 $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, BH — её высота. Докажем, что

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH.$$

Рис. 5.27

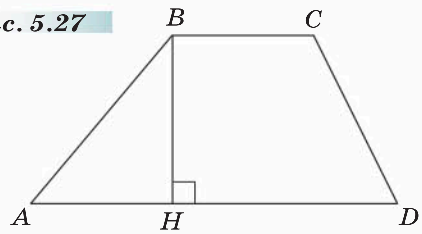
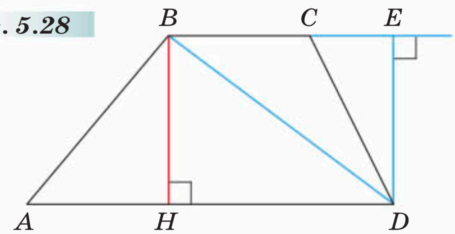


Рис. 5.28



Проведём диагональ трапеции BD (рис. 5.28). Диагональ делит трапецию на треугольники ABD и BCD. Проведём высоту DE треугольника BCD, она также является и высотой трапеции, то есть $DE = BH$.

Площадь трапеции $ABCD$ равна сумме площадей треугольников ABD и BCD. Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH + \frac{1}{2} BC \cdot BH =$$

$$= \frac{1}{2} BH\,(AD + BC) = \frac{AD + BC}{2} \cdot BH. \ \blacktriangledown$$

Если длины оснований трапеции обозначить буквами a и b, а высоту — буквой h, то формула площади трапеции примет вид:

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

СЛЕДСТВИЕ. Площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.

ПЛОЩАДЬ ПРОИЗВОЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

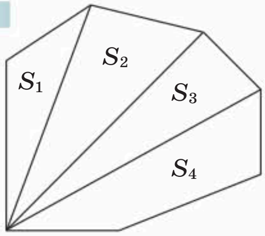
Мы получили формулы для вычисления площадей прямоугольника, параллелограмма, треугольника, трапеции. А как быть, когда требуется найти площадь произвольного многоугольника?

Для того чтобы найти площадь трапеции, мы разбивали её на треугольники. Таким же способом можно найти площадь любого многоугольника, в том числе и многоугольника, изображённого на рисунке 5.29, *а*.

На рисунке *5.29, б* для вычисления площади многоугольника его разбили на четырёхугольник и треугольник.

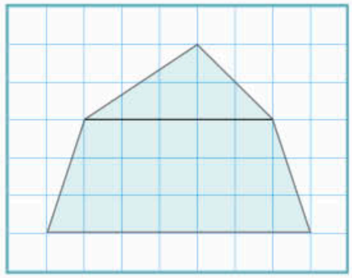
Рис. 5.29

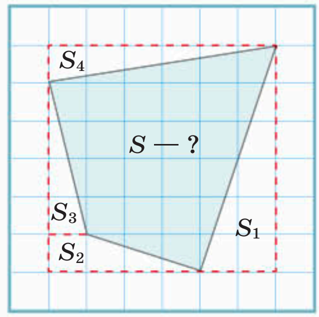
а)



$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

б)





$S = S_{\text{квадр.}} - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$

Рис. 5.30

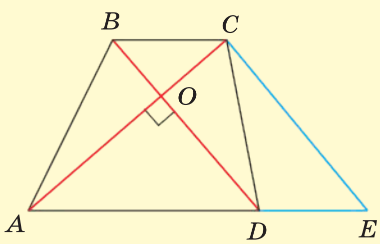
Иногда для вычисления площади многоугольника требуется дополнительное построение (рис. *5.30*).

Задача. Диагонали трапеции, равные 20 см и 30 см, пересекаются под прямым углом. Найдите площадь трапеции.

Решение. Трудность этой задачи состоит в том, что диагонали трапеции не являются сторонами одного треугольника. С помощью дополнительного построения получим треугольник со сторонами, равными диагоналям трапеции.

Итак, пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $AC \perp BD$, $AC = 20$ см, $BD = 30$ см.

Проведём через вершину C прямую CE, параллельную диагонали BD (E — точка пересечения этой прямой с прямой AD).



Ясно, что $\angle ACE = \angle AOD = 90°$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми BD и CE и секущей AC. Следовательно, треугольник ACE — прямоугольный.

Четырёхугольник $DBCE$ — параллелограмм по построению, тогда $DE = BC$, $CE = BD$ как противоположные стороны параллелограмма.

Треугольники ABC и CDE — равновеликие, так как $DE = BC$, а каждая из высот, проведённых к этим сторонам, является одновременно и высотой трапеции. Таким образом,

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{CDE} + S_{ACD} = S_{ACE} =$$
$$= \frac{1}{2} AC \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 20 \text{ см} \cdot 30 \text{ см} = 300 \text{ см}^2.$$

Ответ: 300 см^2.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте и докажите теорему о площади трапеции.
- Найдите площадь трапеции, если:
  а) её основания равны 5 см и 9 см, а высота — 7 см;
  б) её средняя линия равна 4 см, а высота — 5 см.
- Как найти площадь трапеции, если известны длины всех её сторон? Найдите площадь трапеции, если её основания равны 6 см и 10 см, боковые стороны — 8 см и 12 см.
- Принимая длину стороны клетки за единицу, вычислите площадь многоугольника, изображённого на рисунке *5.29, б*.

5.6 МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

ВЫ УЗНАЕТЕ:
- В чём состоит метод площадей
- Классический способ доказательства теоремы Пифагора

Понятие площади широко используется при доказательстве теорем и решении задач.

МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ Этот метод основан на использовании площади как вспомогательной величины, его ещё называют методом вспомогательной площади. Докажем этим методом теорему о биссектрисе угла треугольника.

ТЕОРЕМА. Если BD — биссектриса угла B треугольника ABC, то $AD : AB = DC : BC$.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть угол при вершине B равен 2β. Рассмотрим треугольники ABD и DBC (рис. 5.31) и найдём их площади:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin(ABD) = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin\beta;$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} BD \cdot BC \cdot \sin(DBC) = \frac{1}{2} BD \cdot BC \cdot \sin\beta.$$

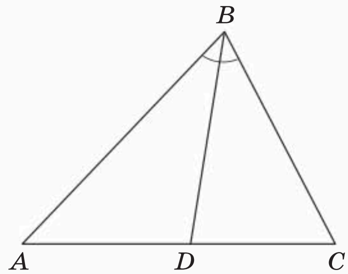


Рис. 5.31

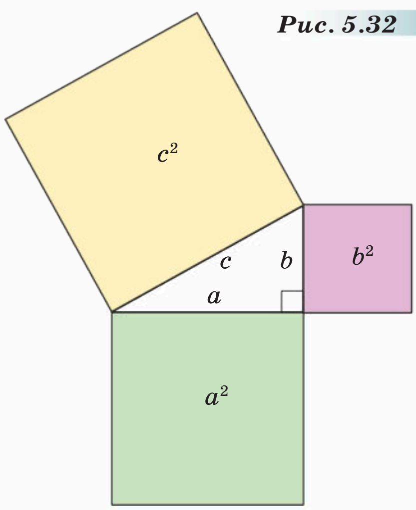
Так как высота, проведённая из вершины B, у этих треугольников общая, то площади этих треугольников относятся как длины отрезков AD и DC.

Имеем: $$\frac{AD}{DC} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BD \sin\beta}{\frac{1}{2} BD \cdot BC \sin\beta} = \frac{AB}{BC}.$$ Отсюда:

$$AD : AB = DC : BC. ▼$$

О ТЕОРЕМЕ ПИФАГОРА Исторически доказательство теоремы Пифагора связано с вычислением площадей, и в классической формулировке теоремы Пифагора говорится о площадях.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах этого треугольника (рис. 5.32).

Рис. 5.32


Известно много различных доказательств этой теоремы. Вот одно из них.

Доказательство. Пусть дан прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 5.33).

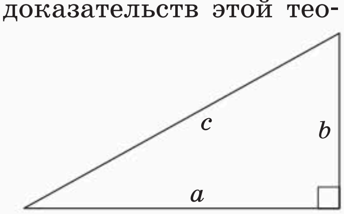


Рис. 5.33

Построим квадрат со стороной $a + b$ и соединим последовательно отрезками точки разбиения сторон квадрата на отрезки a и b (рис. *5.34*).

Получили разбиение квадрата на 4 равных прямоугольных треугольника с катетами a и b и ромб со сторонами, равными гипотенузе c нашего треугольника. Этот ромб является квадратом, так как все его углы равны разности 180° и суммы острых углов данного прямоугольного треугольника, составляющей, как известно, 90°.

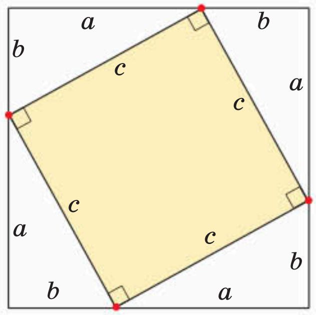


Рис. 5.34

Площадь S всего квадрата равна $(a+b)^2$. Площади треугольников равны $\frac{1}{2}ab$, площадь квадрата со стороной c равна c^2.

Имеем: $$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ то есть } c^2 = a^2 + b^2. \ ▼$$

Вот ещё один способ доказательства теоремы Пифагора.

Построим два равных квадрата со стороной $a+b$ так, как показано на рисунке *5.35 а, б*.

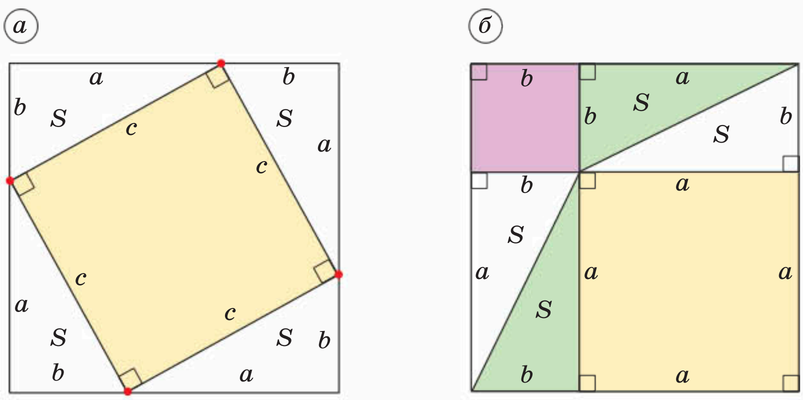


Рис. 5.35

Пусть S — площадь данного прямоугольного треугольника с катетами a и b и гипотенузой c.

Получаем: $4S + c^2 = 4S + a^2 + b^2$, то есть $c^2 = a^2 + b^2$.

С соседом по парте рассмотрите рисунки *5.36*, *5.37* и согласно рисункам докажите теорему Пифагора. Найдите в Интернете и предложите другие способы доказательства теоремы Пифагора. А может, вы придумаете свои способы доказательства теоремы?

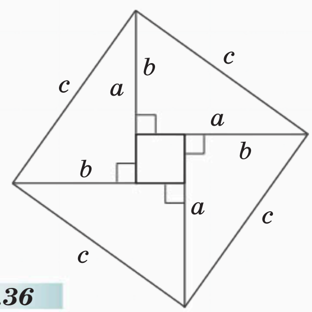


Рис. 5.36

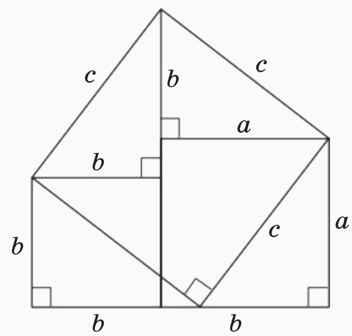


Рис. 5.37

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, в чём суть метода площадей.
- Докажите теорему Пифагора разными способами.
- С соседом по парте найдите среди задач к пунктам 5.3 и 5.5 задачи, решаемые методом площадей.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

П. 5.1

К **1** Какие из прямоугольников на рисунке *1* равновелики?

2 а) Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника.
б) Докажите, что диагонали ромба делят его на 4 равновеликих треугольника.

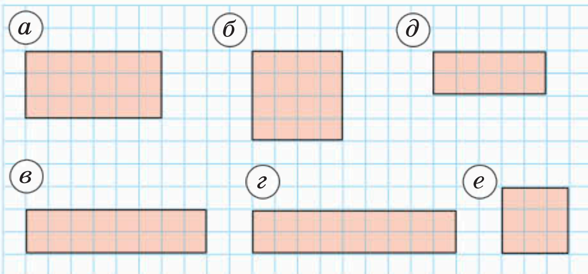


Рис. 1

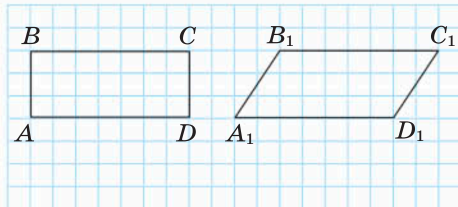


Рис. 2

К Т **3** а) Докажите, что параллелограмм и прямоугольник на рисунке *2* равносоставлены.
б) M и N — середины сторон AB и BC треугольника ABC, $CO \parallel AB$ (рис. *3*). Докажите, что треугольник ABC и четырёхугольник $AMOC$ равносоставлены.

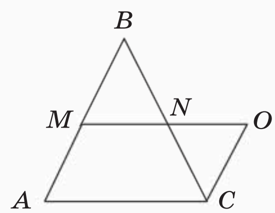


Рис. 3

К **4** Вырежите из бумаги два равных равнобедренных треугольника и составьте из них: а) ромб; б) параллелограмм, отличный от ромба.
Что можно сказать про площади составленных фигур?

К **5** Стороны прямоугольника равны 2 см и 8 см. Нарисуйте: а) равновеликий прямоугольнику квадрат; б) равновеликий ему прямоугольник.

К **6** а) Через вершину B и середину боковой стороны CD трапеции $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямую AD в точке M. Докажите, что треугольник ABM и трапеция равносоставлены.

б) Точки M, N, O, P — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольники $ABNP$ и $AMOD$ равновелики.

7 Один из двух равных выпуклых четырёхугольников разрезали по одной диагонали, а второй четырёхугольник разрезали по другой диагонали. Докажите, что из четырёх полученных треугольников можно сложить параллелограмм.

8 Выпуклый четырёхугольник разрезали на четыре части по отрезкам, соединяющим середины его противолежащих сторон. Докажите, что из этих частей можно составить параллелограмм.

ПОВТОРЯЕМ

1. На рисунке *4* лучи AM и CN — биссектрисы внешних углов треугольника ABC. Докажите, что эти лучи пересекаются.

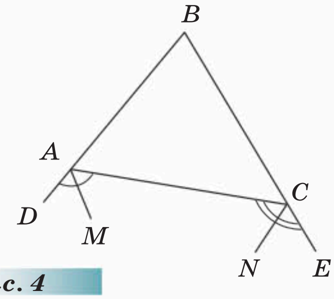


Рис. 4

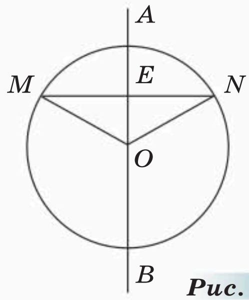


Рис. 5

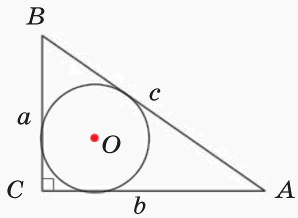


Рис. 6

2. Диметр AB окружности с центром в точке O пересекает хорду MN в точке E под углом 90° (рис. 5). Найдите расстояние OE от центра окружности до хорды MN, если длина хорды равна 24 см, а диаметра — 26 см.

3. На рисунке 6 окружность с центром O вписана в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Найдите радиус вписанной окружности, если $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

п. 5.2

9 Найдите площадь прямоугольника $ABCD$, если:
а) $AB = 8$ см, $BC = 3$ см; б) $AB = 3$ дм, $AD = 5$ см.

10 а) Смежные стороны прямоугольника относятся как $5:3$, а его периметр равен 32 см. Найдите площадь прямоугольника.

11 а) Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 22 см, а площадь — 24 см^2.
б) Найдите стороны прямоугольника, если его периметр равен 30 см, а площадь — 36 см^2.

12 а) Диагональ квадрата равна $7\sqrt{2}$. Найдите его площадь.
б) Площадь квадрата равна 24 см^2. Найдите его периметр.

Т 13 а) Найдите площади фигур, изображённых на рисунке 7.
б) Найдите площадь треугольника AMD (рис. 8), если смежные стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 см и 5 см.

Т 14 Вычислите площади четырёхугольников, изображённых на рисунке 9, считая 1 клетку за 1 кв. ед.

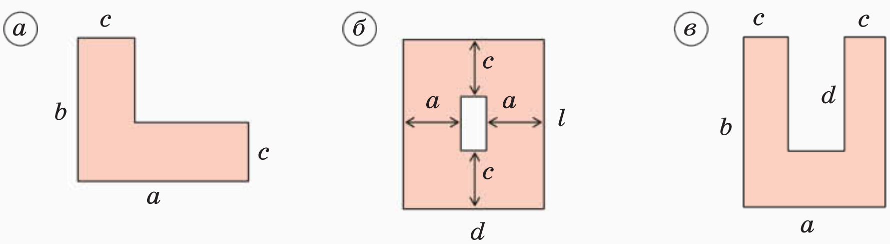


Рис. 7

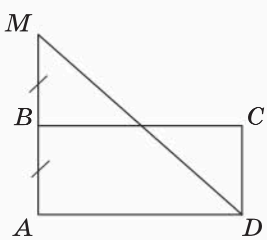


Рис. 8

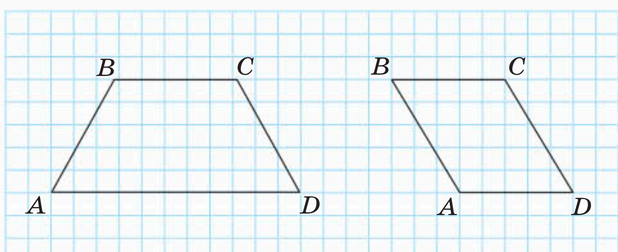


Рис. 9

15 а) Найдите отношение площадей квадратов, если их стороны относятся как:
1) $2:3$; 2) $4:\sqrt{2}$.
б) Найдите отношение сторон квадрата, если их площади относятся как:
1) $16:81$; 2) $8:25$.

К **16** **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**
Как изменится площадь прямоугольника, если:
а) две его противоположные стороны увеличить в 2 раза?
б) две противоположные стороны увеличить в 3 раза, а другие стороны уменьшить в 2 раза?
в) две противоположные стороны уменьшить в 5 раз, а две другие увеличить в 5 раз?
г) все стороны прямоугольника увеличить в k раз?
д) все стороны уменьшить в m раз?

К **17** а) Пол медицинского кабинета — прямоугольник со сторонами $4 \times 3{,}2$ м. Сколько коробок с кафельной плиткой нужно купить, чтобы выложить плиткой пол, если в коробке 10 плиток квадратной формы со стороной 40 см?
б) Сколько досок потребуется для настила пола веранды размером $6 \times 6{,}5$ м, если длина доски 3 м, а ширина 25 см?

Т **18** а) Расход краски на однослойное покрытие составляет 200 г на 1 м^2. Хватит ли двух трёхкилограммовых банок краски для двухслойного покрытия стены длиной 4,5 м и высотой 3 м?
б) Пол комнаты покрывают паркетом прямоугольной формы. Длина каждой дощечки паркета 40 см, ширина 10 см. Длина комнаты 4,8 м, ширина 3 м. Хватит ли 6 коробок паркета, если в коробке 60 дощечек?

19 Считая, что площадь 1 клетки равна 1 см^2, найдите площади:
а) квадрата (рис. *10, а*);
б) прямоугольника (рис. *10, б*).

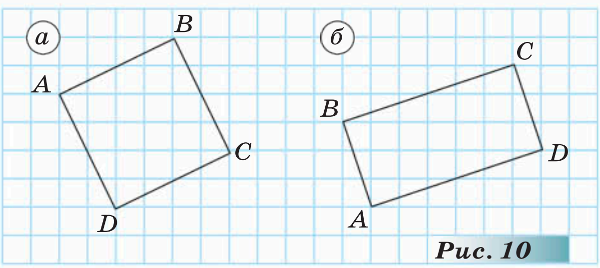


Рис. 10

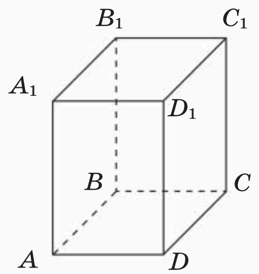


Рис. 11

20 а) Диагональ m прямоугольника образует угол α с большей стороной. Найдите площадь прямоугольника.
б) Диагональ квадрата равна a. Найдите площадь квадрата.

21 Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше квадрата, вписанного в окружность?

22 Два участка земли огорожены заборами, длины которых одинаковы. Один участок имеет форму квадрата со стороной 40 м, а другой — прямоугольника со сторонами 50 м и 30 м. Площадь какого участка больше и насколько?

К **23** а) Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. *11*), если $AD = 4$ см; $AB = 3$ см, $AA_1 = 5$ см.

б) Найдите площадь полной поверхности куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. *12*), если ребро куба равно 5.

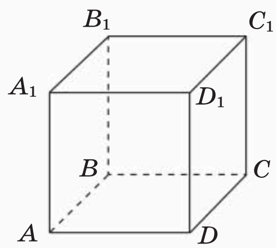


Рис. 12

К 24 Осевым сечением цилиндра является прямоугольник (рис. *13*). Найдите его площадь, если высота цилиндра равна 10 см, а радиус основания — 4 см.

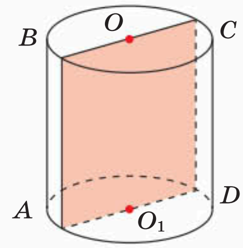


Рис. 13

25 а) Площадь прямоугольника равна 72 см^2. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что одна из них в 2 раза больше другой

б) Стороны прямоугольника относятся как 3 : 4. Найдите площадь прямоугольника, если его диагональ равна 20 см.

26 Найдите площадь прямоугольника, если известны его сторона a, диагональ d и угол между диагоналями φ. Есть ли в задаче лишние данные?

ПОВТОРЯЕМ

1. Докажите, что диагонали параллелограмма разбивают параллелограмм на две пары равных треугольников.
2. Докажите, что биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.
3. Острый угол равнобедренной трапеции равен 30°, высота трапеции — 5 см. Чему равна боковая сторона трапеции?

П. 5.3

27 Пусть a — основание параллелограмма, h — его высота, S — его площадь. Найдите:

а) S, если $a = 20$ см, $h = 3$ см; б) S, если $a = 3{,}5$ см, $h = 7{,}2$ см;
в) h, если $S = 4{,}8$ см^2, $a = 6$ см; г) a, если $S = 36$ см^2, $h = 1{,}2$ см.

28 а) Острый угол параллелограмма равен 60°. Найдите его площадь, если: стороны параллелограмма равны: 1) 6 см и 10 см; 2) a и b.

б) Один из углов параллелограмма равен 45°. Найдите его площадь, если: стороны параллелограмма равны: 1) 4 см и 6 см; 2) a и b.

29 Найдите площадь параллелограмма, если его диагональ, равная 11 см, перпендикулярна стороне, равной 8 см.

30 Какие из параллелограммов на рисунке *14* равновелики?

31 Найдите площадь параллелограмма, если: а) его периметр равен 42 см, а высоты — 6 см и 8 см; б) его сторона равна 5 см, а высота, проведённая из вершины тупого угла, делит другую сторону на отрезки длиной 4 см и 7 см.

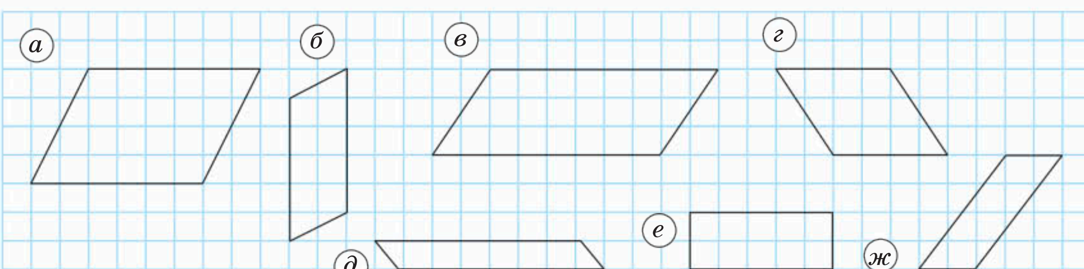


Рис. 14

32 а) Площадь и периметр ромба равны 24 см^2 и 24 см соответственно. Найдите высоту ромба.
б) Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 10 и 18.

33 Найдите диагонали ромба, если одна из них в 1,5 раза больше другой, а площадь ромба равна 81 см^2.

34 а) Диагонали ромба равны 12 см и 18 см. Найдите площадь четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон ромба.
б) Найдите площадь ромба, если один из его углов равен 30°, а высота равна 7 см.

35 а) Стороны параллелограмма равны 24 см и 32 см, одна из высот — 30 см. Найдите другую высоту параллелограмма.
б) Высоты параллелограмма равны 5 см и 8 см. Одна из сторон параллелограмма равна 12 см. Найдите неизвестную сторону параллелограмма. Указание. Рассмотрите два случая.

36 а) Высоты параллелограмма равны 6 см и 8 см, угол между ними равен 30°. Найдите площадь параллелограмма.
б) Угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен 45°. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны 8 см и 12 см.

37 а) Найдите площадь ромба, если его диагональ равна 10 см, а высота — 6 м.
б) Один из углов ромба равен 60°, меньшая диагональ равна 8. Найдите площадь ромба.

38 Найдите площадь ромба, если известны: а) сторона ромба a, угол между сторонами α, одна из диагоналей d;
б) диагонали ромба d_1 и d_2, угол между сторонами ромба α.
Есть ли в каждой из задач лишние данные? Если есть, то представьте решения с использованием различных данных.

К 39 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**

1. Стороны параллелограмма равны a и b. Какой из параллелограммов с данными сторонами имеет наибольшую площадь? Чему она равна?
2. Ромб и квадрат имеют одинаковые периметры. Какая из этих фигур имеет бóльшую площадь?
3. Квадрат и ромб имеют одинаковые площади. Какая из фигур имеет больший периметр?

ПОВТОРЯЕМ

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC медианы AM и CN пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC — равнобедренный и найдите его периметр, если $NM = 12$ см, а расстояние от точки O до основания треугольника равно 5 см.
2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C: $AC = 8$, $BC = 6$. Точка M делит сторону AC в отношении $1 : 3$, считая от вершины A. В треугольнике BCM найдите синус, косинус и тангенс угла CBM.

П. 5.4

К Т 40 Начертите остроугольный треугольник и проведите его высоты. Проведите измерения и вычислите площадь треугольника, беря поочерёдно за основание каждую сторону треугольника.

41 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если: а) его катеты равны 3 и 8; б) высота, опущенная на гипотенузу, равна 4, а гипотенуза — 7.

42 Найдите площадь равнобедренного треугольника, если известно, что: а) его основание равно 10, а боковая сторона — 13; б) его боковая сторона равна 17, а медиана, проведённая к основанию, равна 8.

43 Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если: а) его площадь равна 15 см^2, а высота, проведённая из вершины прямого угла, равна 3 см; б) его площадь равна 15 см^2, а один из катетов равен 3 см.

К Т **44** Укажите, какие треугольники на рисунке *15* равновелики.

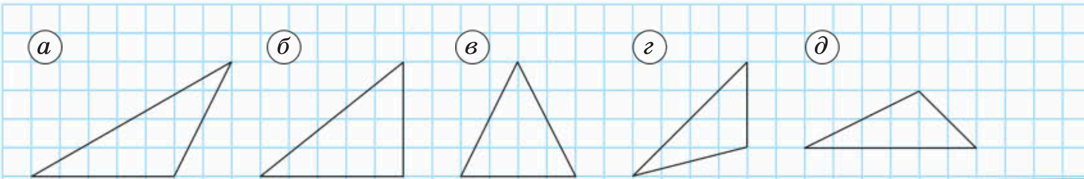
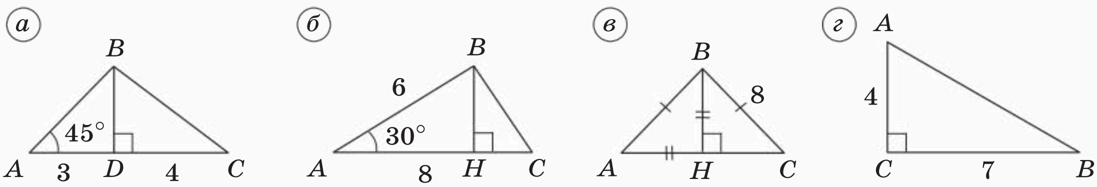


Рис. 15

45 а) Площадь треугольника равна 21 см^2. Найдите сторону треугольника, если высота, проведённая к этой стороне, равна 7 см.
б) Площадь треугольника равна 18 см^2. Найдите высоту треугольника, проведённую к стороне, равной 12 см.

К Т **46** Используя данные рисунка *16*, найдите площадь треугольника *ABC*.

Рис. 16



47 Известно, что две стороны треугольника равны 16 см и 10 см, а высота, проведённая к меньшей из данных сторон, равна 8 см. Найдите высоту, проведённую к большей из данных сторон треугольника.

48 Две высоты треугольника равны 6 см и 9 см. Сторона, к которой проведена бо́льшая из данных высот, равна 8 см. Найдите сторону, к которой проведена меньшая из данных высот.

49 Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна 10 см. Найдите площадь этого треугольника, если:
а) проекции катетов на гипотенузу равны 4 см и 25 см;
б) проекция одного из катетов на гипотенузу равна 20 см.

К **50** а) Вычислите площадь равностороннего треугольника со стороной 4 см.
б) Чему равна сторона равностороннего треугольника, если его площадь равна 24 см^2?

51 а) Вычислите площадь треугольника со сторонами 3, 5, 6.
б) Чему равна площадь параллелограмма, если его стороны равны 5 см и 8 см, а одна из диагоналей — 10 см?

52 а) Чему равно отношение площадей исходного треугольника и треугольника, отсечённого от исходного средней линией?
б) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, коэффициент подобия равен 0,2, площадь меньшего треугольника равна 12. Чему равна площадь большего треугольника?

53 а) Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной a и основанием b.
б) Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна c.
в) Катеты прямоугольного треугольника равны a и b. Найдите высоту треугольника, проведённую к гипотенузе.

К **54** а) В треугольнике ABC проведена медиана AM и средняя линия MN, параллельная стороне AB. Площадь треугольника AMN равна 2. Найдите площадь треугольника ABC.
б) Докажите, что диагонали делят параллелограмм на четыре равновеликих треугольника.

55 а) Медианы треугольника ABC пересекаются в точке M, площадь треугольника ABM равна S. Найдите площадь треугольника ABC.
б) В треугольнике проведены три медианы. Докажите, что они разбивают треугольник на 6 равновеликих треугольников.

56 а) Площадь ромба равна 60 см^2, а его диагонали относятся как $8:15$. Найдите периметр ромба.
б) Найдите площадь ромба, сторона которого равна 50 см, а сумма диагоналей — 124 см.

57 Точки M и N принадлежат соответственно сторонам AB и BC треугольника ABC. Известно, что $MN \parallel AC$, $S_{MBN} = 12$ см^2, $AM = 3$ см, $MB = 2$ см. Найдите площадь трапеции $AMNC$.

К **58** Постройте треугольник, равновеликий данному параллелограмму.

59 а) Биссектриса прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 3 см и 4 см. Найдите площадь треугольника.
б) Биссектриса прямоугольного треугольника делит противолежащий катет на отрезки длиной 12 см и 20 см. Найдите площадь этого треугольника.

К **60** а) Точка касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит гипотенузу на отрезки, один из которых на 12 см больше другого. Найдите площадь треугольника, если радиус окружности равен 4 см.
б) Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит боковую сторону треугольника в отношении $5:4$, считая от вершины, противолежащей основанию. Радиус окружности равен 8 см. Найдите площадь треугольника.

ПОВТОРЯЕМ

1. В равнобедренной трапеции биссектриса тупого угла параллельна боковой стороне. Найдите углы трапеции.
2. В прямоугольной трапеции боковая сторона равна 12 см, а меньший угол — 60°. Найдите высоту трапеции.
3. Средняя линия равнобедренной трапеции равна 20, боковая сторона — 17. Высота трапеции равна 8. Найдите основания трапеции.

П. 5.5

К Т 61 Начертите трапецию и проведите её диагональ. Выполните необходимые измерения и вычислите площадь трапеции двумя способами: 1) используя формулу площади трапеции; 2) вычислив площади полученных треугольников.

62 а) Найдите площадь трапеции, если её основания равны 8 и 11, а высота — 6.
б) Найдите площадь трапеции, если её средняя линия равна 11 см, а высота — 7 см.
в) Найдите высоту трапеции, если её площадь равна 30 см^2, а полусумма оснований — 15 см.

63 По данным рисунка *17* найдите площадь трапеции.

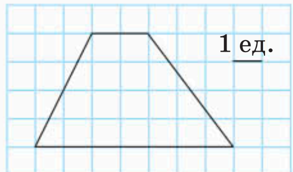


Рис. 17

64 а) Площадь трапеции равна 63 см^2, а её высота — 3 см. Найдите основания трапеции, если их длины относятся как 3 : 4.
б) Площадь трапеции равна 180 см^2, одно из оснований — 16 см, а высота — 12 см. Найдите другое основание трапеции.

65 **ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ**
Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O.
1) Докажите, что треугольники ABD и ACD равновелики.
2) Докажите, что треугольники ABO и CDO равновелики.
3) Докажите, что отношение площадей треугольников ABC и ACD равно отношению оснований BC и AD.
4) Докажите, что отношение площадей треугольников BOC и AOD равно квадрату отношения оснований BC и AD.
5) Докажите, что значение площади треугольника, содержащего боковую сторону трапеции, равно среднему пропорциональному значений площадей треугольников, содержащих основания трапеции.

66 а) Высота равнобедренной трапеции площадью 60 см^2 и периметром 50 см равна 3 см. Найдите боковую сторону трапеции.
б) Высота прямоугольной трапеции площадью 50 см^2 и периметром 32 см равна 5 см. Найдите боковые стороны трапеции.

67 а) Найдите площадь трапеции с основаниями 18 и 13 и боковыми сторонами 3 и 4.
Указание. Решите задачу несколькими способами: 1) проведя высоты трапеции из вершин тупых углов; 2) проведя через вершины трапеции прямые, параллельные либо боковым сторонам, либо диагоналям трапеции.
б) Найдите площадь трапеции, если одно из её оснований равно 8, высота равна 2, боковые стороны — $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$. Сколько решений имеет задача?

68 Найдите площадь:
а) прямоугольной трапеции с боковыми сторонами 12 см и 13 см, диагональ которой делит пополам прямой угол трапеции;
б) равнобедренной трапеции, высота которой равна h, а диагонали взаимно перпендикулярны.

69 а) Один из углов равнобедренной трапеции равен 45°, а её большее основание и высота равны 5 см и 2 см соответственно. Найдите площадь трапеции.
б) Один из углов равнобедренной трапеции площадью 12 см^2 равен 45°, а одно из её оснований вдвое больше другого. Найдите высоту трапеции.

70 а) В равнобедренной трапеции диагональ делит пополам её острый угол, а среднюю линию трапеции — на отрезки длиной 6 см и 12 см. Найдите площадь трапеции.
б) Основания прямоугольной трапеции равны 9 см и 17 см, а диагональ делит пополам её тупой угол. Вычислите площадь трапеции.

71 а) Основания равнобедренной трапеции равны 16 см и 25 см. Чему равна площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность?
б) Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 12 см, а острый угол — 45°. Найдите площадь трапеции, если в неё можно вписать окружность.

72 а) Диагональ равнобедренной трапеции делит пополам её острый угол и перпендикулярна боковой стороне, её меньшее основание равно a. Найдите площадь трапеции.
б) Диагонали трапеции перпендикулярны, одна из них равна 24 см, средняя линия трапеции — 25 см. Найдите площадь трапеции.

73 а) Основания равнобедренной трапеции равны 20 см и 12 см, диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите площадь трапеции.
б) Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне, равной 30 см, радиус окружности, описанной около неё, равен 25 см. Найдите площадь трапеции.

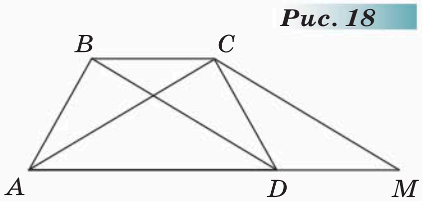
74 а) Диагональ равнобедренной трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 12 см, а боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.
б) Бóльшая диагональ прямоугольной трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 15 см и 9 см. Бóльшая боковая сторона трапеции равна её меньшему основанию. Найдите площадь трапеции.

П. 5.6

75 а) Периметр параллелограмма равен 72 см, его высоты — 8 см и 10 см. Найдите стороны параллелограмма.
б) Высоты параллелограмма равны 6 и 14, меньшая сторона — 9. Найдите периметр параллелограмма.

76 Диагонали ромба 18 см и 24 см. Найдите высоту ромба.

Рис. 18



К **77** а) Докажите, что прямая, которая проходит через середину средней линии трапеции и пересекает её основания, разбивает данную трапецию на два равновеликих многоугольника.
б) На рисунке *18* отрезок CM параллелен диагонали трапеции $ABCD$. Докажите, что трапеция $ABCD$ и треугольник ACM равновелики.

78 В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M. Докажите, что $S_{ABM} : S_{CBM} = AM : MC$.

79 Дан равнобедренный треугольник со сторонами 10, 10 и 12.
а) Найдите радиус вписанной в треугольник окружности.
б) Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

80 а) Докажите, что сумма расстояний от точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон не зависит от положения точки.
б) Докажите, что сумма расстояний от точки внутри равностороннего треугольника до его сторон не зависит от положения точки.

81 а) Найдите площадь трапеции с основаниями 5 и 15 и диагоналями 12 и 16.
б) Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 15 и 20, а сумма оснований равна 25.

К **1** На сторонах AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки K, M, N и P соответственно так, что $MP \parallel AB$; $KN \parallel BC$. Докажите, что точка O, точка пересечения отрезков MP и KN, лежит на диагонали AC тогда и только тогда, когда четырёхугольники $BMOK$ и $DPON$ равновелики.

К **2** На каждой стороне параллелограмма отмечена точка так, что площадь четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках равна половине площади параллелограмма. Докажите, что хотя бы одна из диагоналей этого четырёхугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

3 Радиус вписанной в треугольник окружности равен 1, две стороны треугольника равны 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

4 В прямоугольном треугольнике к гипотенузе проведена медиана. Из середины медианы опущены перпендикуляры на стороны треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров, если площадь исходного треугольника равна S.

5 На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты точки K, M и N так, что $AK : AB = BM : BC = CN : CA = 1 : 3$. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного прямыми AM, BN и CK, составляет $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC.

К **6** Через середины диагоналей AC и BD четырёхугольника $ABCD$ проходит прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках M и N соответственно. Докажите, что треугольники ABN и CDM равновелики.

7 На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M и N так, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм. Прямые BN и DM пересекаются в точке P. Докажите, что четырёхугольники $AMPN$ и $CBPD$ равновелики.

К **8** а) Постройте треугольник, равновеликий данной трапеции.
б) Постройте прямоугольник, равновеликий данной трапеции.

К **9** На отрезке, соединяющем середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$, отмечена точка M. Докажите, что треугольники AMB и CMD — равновелики.

К **10** Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, параллельного основаниям, с концами на боковых сторонах и делящего трапецию на две равновеликие трапеции.

11 Через вершину A треугольника ABC проходят две прямые, делящие сторону BC на 3 равные части. В каком отношении эти прямые делят медиану, выходящую из вершины B?

12 Докажите, что площадь S произвольного четырёхугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$ удовлетворяет неравенству $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

- Какие многоугольники называют равносоставленными?
- Расскажите, как измеряют площади многоугольников. Что такое квадратный сантиметр?
- Какие свойства площадей называют основными?
- Какие многоугольники называют равновеликими?
- Сформулируйте и докажите теорему о площади прямоугольника.
- Докажите, что площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.
- Что такое основание треугольника? Что называют высотой треугольника в том случае, когда выбрано основание?
- Сформулируйте и докажите теорему о площади треугольника.
- Что такое основание параллелограмма? Что называют высотой параллелограмма в том случае, когда выбрано основание?
- Сформулируйте и докажите теорему о площади параллелограмма.
- Как выражается площадь треугольника через две его стороны и угол между ними?
- Как выражается площадь параллелограмма через две его стороны и угол между ними?
- Выведите формулу Герона.
- Сформулируйте и докажите теорему о площади трапеции.
- Как связаны площади двух подобных многоугольников?
- Докажите теорему Пифагора разными способами.
- В чём состоит метод площадей?

ПРОЕКТЫ, КОТОРЫЕ МЫ РЕКОМЕНДУЕМ

1. Золотое сечение — фундаментальное явление природы.

2. Леонард Эйлер — великий учёный и яркая личность.

3. Делаем ремонт кабинета математики.

4. Проектируем спортивную площадку.

5. Готовимся к походу.

Подробные инструкции к проектам — в тетради-тренажёре.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Волошинов А. В.* Математика и искусство / А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2000.

2. *Гарднер М.* Математические новеллы / М. Гарднер. — М.: Мир, 2000.

3. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения / М. Гарднер. — М.: Мир, 1999.

4. *Глейзер Г. И.* История математики в школе / Г. И. Глейзер. — М.: Просвещение, 1964 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**

5. *Левитин К. Е.* Геометрическая рапсодия / К. Е. Левитин. — М.: Знание, 1976, или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**, или М.: Камерон, 2004.

6. Начала Евклида. Книги I—IV / Пер. с греч. и коммент. Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М. Я. Выгодского и И. Н. Веселовского. — М.; Л.: ГТТИ, 1948 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**

7. *Перельман Я. И.* Занимательная геометрия / Я. И. Перельман. — М.; Л.: ГГТИ, 1950 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**

8. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.

9. *Шарыгин И. Ф.* Задачи по геометрии. Планиметрия / И. Ф. Шарыгин. — М.: Наука, 1982 или на сайте **http://ilib.mirrir1.mccme.ru**

10. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика / Глав. ред. М. Д. Аксёнова. — М.: Аванта+, 2003.

ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ:

http://mathnet.ru
http://fcior.edu.ru/
http://etudes.ru
http://school-collection.edu.ru/
http://kvant.info
http://ege.edu.ru
http://math.ru/lib/

ЭТО ВЫ МОЖЕТЕ

Среди перечисленнных ниже утверждений укажите неверные. В каждом случае объясните, почему утверждение неверно. Предложите верное утверждение. Придумайте задачи, в решении которых используются верные утверждения.

- Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен половине прямого угла.
- Вписанный угол в два раза меньше центрального, опирающегося на ту же дугу.
- Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны.
- Диаметр окружности, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.
- Центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения его медиан.
- Каждая точка серединного перпендикуляра к сторонам треугольника равноудалена от его вершин.
- В равностороннем треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

- Сумма углов выпуклого четырёхугольника равна $360°$.
- Параллелограммом называют четырёхугольник, у которого стороны параллельны.
- Если диагонали четырёхугольника равны и перпендикулярны, то этот четырёхугольник — квадрат.
- Если в четырёхугольнике все углы прямые, то это — прямоугольник.
- Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то это — ромб.
- Средняя линия треугольника равна полусумме его периметра.
- Около любого параллелограмма можно описать окружность.
- В любой четырёхугольник можно вписать окружность.

- Прямая, пересекающая стороны треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.
- Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
- Биссектриса треугольника делит его сторону на части, пропорциональные двум другим сторонам.
- Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают от сторон угла пропорциональные отрезки.
- Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $1 : 2$, считая от вершины.
- Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которую называют ортоцентром треугольника.

- Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков хорд равны.
- Наклонная не меньше своей проекции.
- В прямоугольном треугольнике квадрат высоты, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.
- Среднее арифметическое двух отрезков меньше их среднего геометрического.
- Гипотенуза равна сумме катетов.
- Синус и косинус угла больше 1.

- Площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.
- Равновеликие треугольники равны.
- Площадь параллелограмма равна произведению его основания и высоты.
- Отношения площадей подобных треугольников равно коэффициенту подобия.
- Площадь ромба равна произведению его диагоналей.
- Площадь прямоугольного треугольника равна произведению его катетов.

ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

α ↓	$\sin\alpha$ ↓	$\mathrm{tg}\,\alpha$ ↓	$\mathrm{ctg}\,\alpha$ ↓	$\cos\alpha$ ↓	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0,0175	0,0175	57,3	1,000	89
2	0,0349	0,0349	28,6	0,999	88
3	0,0523	0,0524	19,1	0,999	87
4	0,0698	0,0699	14,3	0,998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	0,1045	0,1051	9,51	0,995	84
7	0,1219	0,1228	8,14	0,993	83
8	0,139	0,141	7,11	0,990	82
9	0,156	0,158	6,31	0,988	81
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,90	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,28	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	$\cos\alpha$ ↑	$\mathrm{ctg}\,\alpha$ ↑	$\mathrm{tg}\,\alpha$ ↑	$\sin\alpha$ ↑	α ↑

Учебное издание

Серия «Сферы»

Берсенев Александр Анатольевич
Сафонова Наталья Васильевна

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

Учебник

Санкт-Петербургский филиал

Ответственный за выпуск *М. А. Рачинская*
Редакторы *Н. В. Сафонова, Л. А. Жигулёв, А. В. Каплиёв*
Художественные редакторы *С. Г. Куркина, Е. Н. Морозов*
Художники *С. Г. Куркина, Д. Ю. Герасимов, Е. Е. Бурмистрова*
Фотографии *ООО «Фотобанк Лори»*
Компьютерная вёрстка *Д. Ю. Герасимова, Е. В. Саватеевой*
Дизайн обложки *О. В. Поповича, С. Г. Куркиной, А. А. Жилина*
Технические редакторы *С. В. Терехова, Е. В. Саватеева*
Корректоры *А. В. Локтионова, Е. А. Воеводина, И. В. Чернова, Е. Д. Светозарова*

Формат $84 \times 108/_{16}$.
Усл. печ. л. 18,48. Уч.-изд. л. 11,35.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва,
ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Санкт-Петербургский филиал
Акционерного общества «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 190000, г. Санкт-Петербург, Литейный пр., д. 37-39.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — **vopros@prosv.ru**